

# Selbstähnliche Polyeder

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades  
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der  
Fakultät für Mathematik und Informatik  
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. Ines Osburg  
geboren am 11. Mai 1975 in Leinefelde

**Gutachter**

1. Prof. Dr. Eike Hertel
2. Prof. Dr. Horst Martini

**Tag der letzten Prüfung des Rigorosums:** 27.08.2004

**Tag der öffentlichen Verteidigung:** 09.09.2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1 Grundlegende Begriffsbildungen und Bezeichnungen</b>	<b>5</b>
<b>2 Selbstähnlichkeit konvexer <math>n</math>-Ecke</b>	<b>9</b>
2.1 Selbstähnliche und replizierende Dreiecke . . . . .	12
2.2 Selbstähnliche und replizierende konvexe Vierecke . . . . .	14
2.3 Selbstähnliche und replizierende konvexe Fünfecke . . . . .	25
<b>3 Selbstähnlichkeit nichtkonvexer <math>n</math>-Ecke</b>	<b>48</b>
3.1 Notwendige Bedingungen für die Selbstähnlichkeit . . . . .	48
3.2 Replizierende nichtkonvexe $n$ -Ecke . . . . .	51
<b>4 Selbstähnlichkeit <math>d</math>-dimensionaler konvexer Polyeder</b>	<b>54</b>
4.1 Eine notwendige Bedingung für die Selbstähnlichkeit . . . . .	54
4.2 Konstruktionen replizierender $d$ -Polytope . . . . .	56
4.3 Klassen replizierender $d$ -Polytope . . . . .	57
4.4 Replizierende $d$ -dimensionale Quader . . . . .	65
4.5 2-replizierende $d$ -Polytope . . . . .	70
<b>5 Abschließende Bemerkungen</b>	<b>76</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>

# Einleitung

In [19] fragt C.D. Langford nach denjenigen ebenen Figuren, welche in vier Teile zerlegt werden können, die paarweise kongruent und ähnlich zur Ausgangsfigur sind. Solche Figuren werden 4-replizierend genannt. Beispiele zeigt die Abbildung 1.

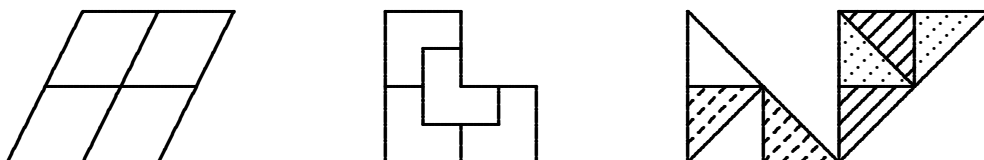


Abbildung 1: 4-replizierende Figuren

Die von Langford angegebene Liste 4-replizierender Figuren wurde von S.W. Golomb erweitert [11]. G. Valette und E. Zamfirescu haben später alle 4-replizierenden konvexen Polygone bestimmt [21]. Daneben wurden aber auch  $k$ -replizierende Polygone für  $k \neq 4$  untersucht. Dabei heißt eine Menge  $k$ -replizierend, wenn sie sich in  $k \geq 2$  paarweise kongruente zur Ausgangsmenge ähnliche Mengen zerlegen läßt. So haben St.L. Snover, Ch. Waiveris und J.K. Williams eine Klassifikation der  $k$ -replizierenden Dreiecke veröffentlicht [20].

Eine Anwendung finden  $k$ -replizierende Polygone bei der Konstruktion von Zerlegungen der Ebene in paarweise kongruente Polygone. Man kann  $k$ -replizierende Polygone so anordnen, daß sie größere Polygone der gleichen Gestalt bilden. Diese größeren Polygone kann man in der gleichen Weise zusammensetzen und erhält noch größere Polygone. Durch fortwährendes Wiederholen dieses Verfahrens ist es möglich, die ganze Ebene zu zerlegen (siehe dazu [12]). Beispiele von Zerlegungen der Ebene, die man auf diese Art gewinnt, findet man im Abschnitt 10.1 von [12]. Dort werden auch Eigenschaften solcher Zerlegungen diskutiert. So sind einige der dort angegebenen Zerlegungen nichtperiodisch, d.h. die Symmetriegruppen dieser Zerlegungen enthalten keine nichttriviale Translation.

In der vorliegenden Arbeit werden neben den  $k$ -replizierenden konvexen und nicht-konvexen Polygonen auch  $k$ -replizierende  $d$ -dimensionale Polyeder mit  $d \geq 3$  studiert. Über solche Polyeder weiß man bis jetzt nur sehr wenig. E. Hertel hat die 8-replizierenden dreidimensionalen Simplexe untersucht [14] und eine Klasse  $2^d$ -replizierender  $d$ -dimensionaler Polyeder bestimmt [16]. Außerdem gibt es von Ch. Bandt

eine Bemerkung, daß man durch Produktkonstruktionen z. B. zweier rechtwinkliger Dreiecke 2-replizierende Polyeder gewinnen kann [1]. Eine Vermutung von McMullen besagt, daß für  $d \geq 3$  jedes  $k$ -replizierende  $d$ -dimensionale Polyeder kombinatorisch äquivalent zu einem kartesischen Produkt von Simplexen ist [5, Seite 88]. Wie man mit  $k$ -replizierenden Polygonen Zerlegungen der Ebene in paarweise kongruente Polygone konstruieren kann, so kann man mit  $k$ -replizierenden  $d$ -dimensionalen Polyedern entsprechende Zerlegungen des  $d$ -dimensionalen euklidischen Raumes konstruieren. Zerlegungen des  $d$ -dimensionalen euklidischen Raumes in paarweise kongruente Polyeder sind Gegenstand zahlreicher Arbeiten (z. B. [6], [10]). Eine weitere Anwendung können  $k$ -replizierende Polyeder in der angewandten Numerik finden. Wenn man eine Zerlegung eines Gebiets in  $k$ -replizierende Polyeder hat, kann diese Zerlegung verfeinert werden, ohne die Gestalt der Zerlegungsteile zu ändern.

Hier wird ferner die Fragestellung von Langford dahingehend modifiziert, daß nicht mehr die Kongruenz der Zerlegungsteile gefordert wird. Es werden also diejenigen Polyeder untersucht, die sich in  $k \geq 2$  zum Ausgangspolyeder ähnliche Polyeder zerlegen lassen. Polyeder mit dieser Eigenschaft werden  $k$ -selbstähnlich genannt. Auch über die  $k$ -selbstähnlichen  $d$ -dimensionalen Polyeder mit  $d \geq 3$  ist kaum etwas bekannt, während zu den  $k$ -selbstähnlichen Polygonen eine Reihe von Veröffentlichungen vorliegt. So wurden die  $k$ -selbstähnlichen Dreiecke ebenfalls vollständig klassifiziert [9, 18].

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert. Das 1. Kapitel dient der Einführung der verwendeten Begriffe und Bezeichnungen. Im 2. Kapitel werden die  $k$ -selbstähnlichen und die  $k$ -replizierenden konvexen  $n$ -Ecke untersucht. Da  $n \in \{3, 4, 5\}$  eine notwendige Bedingung für die Zerlegbarkeit eines konvexen  $n$ -Ecks in konvexe  $n$ -Ecke ist, sind die Untersuchungen auf Dreiecke, Vierecke und Fünfecke beschränkt. Es wird u. a. ein Überblick über die bekannten Ergebnisse gegeben. Insbesondere wird die Klassifikation der  $k$ -selbstähnlichen und der  $k$ -replizierenden Dreiecke angegeben. Eine Klassifikation der  $k$ -selbstähnlichen und der  $k$ -replizierenden Vierecke liegt nur für  $k \in \{2, 3, 4\}$  vor. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß jedes  $k$ -replizierende Viereck ein Trapez oder ein Sehnenviereck ist. Die  $k$ -selbstähnlichen Parallelogramme werden für alle  $k \neq 5$  klassifiziert, die  $k$ -replizierenden Parallelogramme werden vollständig klassifiziert. Im Gegensatz zu den Dreiecken und Vierecken sind keine  $k$ -selbstähnlichen konvexen Fünfecke bekannt. Eine Vermutung von E. Hertel [15] besagt, daß solche Fünfecke nicht existieren. Diese Vermutung konnte bis jetzt weder bestätigt noch widerlegt werden. Hier wird eine notwendige Bedingung für die Innenwinkelgrößen eines  $k$ -selbstähnlichen konvexen Fünfecks angegeben. Fordert man zusätzlich die Kongruenz der Zerlegungsteile, dann existiert kein konvexes Fünfeck, das sich in  $k \geq 2$  zum Ausgangsfünfeck ähnliche Fünfecke zerlegen läßt. Einen Beweis dieser Aussage findet man am Ende des 2. Kapitels.

Im Mittelpunkt des 3. Kapitels stehen die  $k$ -selbstähnlichen nichtkonvexen  $n$ -Ecke. Zunächst wird eine notwendige Bedingung für die Anzahl der Reflexecken  $k$ -selbstähnlicher nichtkonvexer  $n$ -Ecke bestimmt. Ferner wird gezeigt, daß für  $n = 5$  und für jede gerade Zahl  $n \geq 6$  sogar  $k$ -replizierende nichtkonvexe  $n$ -Ecke existieren.

Gegenstand des 4. Kapitels sind  $k$ -selbstähnliche konvexe Polyeder. Es wird eine notwendige Bedingung für die Selbstähnlichkeit von konvexen Polyedern bewiesen, und es wird gezeigt, wie man aus replizierenden konvexen Polyedern replizierende konvexe Polyeder höherer Dimension konstruieren kann. Außerdem werden Klassen replizierender Polyeder vorgestellt. Ferner werden zwei Spezialfälle betrachtet: Es werden  $k$ -replizierende  $d$ -dimensionale Quader für alle natürlichen Zahlen  $k \geq 2$  und 2-replizierende  $d$ -dimensionale konvexe Polyeder bestimmt.

Im letzten Kapitel wird auf offene Probleme hingewiesen, die für weitere Untersuchungen Anlaß geben können.

Ich möchte mich bei Prof. Dr. E. Hertel für die Anregung, sich mit diesem interessanten Thema zu beschäftigen, und seine Unterstützung herzlich bedanken.

# Kapitel 1

## Grundlegende Begriffsbildungen und Bezeichnungen

In dieser Arbeit wird der  $d$ -dimensionale euklidische Raum stets aufgefaßt als der Vektorraum  $\mathbb{R}^d$  der reellen  $d$ -Tupel  $x = (x_1, \dots, x_d)$  mit dem Skalarprodukt  $xy = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ . In der Bezeichnung wird also nicht zwischen Punkten und Vektoren unterschieden.

Es werden jetzt einige Grundbegriffe der Polyedergeometrie bereitgestellt (vgl. [13]). Ein *konvexes Polyeder*  $P$  ist die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge  $\{p_1, \dots, p_n\}$  des Raumes  $\mathbb{R}^d$ :

$$P = \text{conv}\{p_1, \dots, p_n\} \\ := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Es ist *k-dimensional*, wenn es in einer  $k$ -dimensionalen Ebene aber in keiner  $(k-1)$ -dimensionalen Ebene des  $\mathbb{R}^d$  liegt. Die  $k$ -dimensionalen konvexen Polyeder werden auch *k-Polytope* genannt. Ist das konvexe Polyeder  $P$  die konvexe Hülle der Punkte  $p_1, \dots, p_n$  und kann von diesen Punkten keiner weggelassen werden, ohne die konvexe Hülle zu verändern, so heißen die Punkte  $p_1, \dots, p_n$  *Ecken* von  $P$ . Eine Hyperebene  $H(u, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^d : xu = \alpha\}$  mit  $u \in \mathbb{R}^d$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  wird *Stützebene* des konvexen Polyeders  $P$  genannt, wenn sie mit  $P$  einen nichtleeren Durchschnitt hat und  $P$  ganz in einem der von  $H(u, \alpha)$  bestimmten Halbräume  $\{x \in \mathbb{R}^d : xu \leq \alpha\}$  bzw.  $\{x \in \mathbb{R}^d : xu \geq \alpha\}$  enthalten ist. Der Durchschnitt  $F := P \cap H(u, \alpha)$  eines konvexen Polyeders  $P$  mit einer Stützebene  $H(u, \alpha)$  von  $P$  ist offensichtlich ein konvexes Polyeder, das aus Randpunkten von  $P$  besteht. Dieses Polyeder heißt *Seite* von  $P$ . Ist die Seite  $F$  von  $P$   $l$ -dimensional, wird  $F$  auch kurz *l-Seite* genannt. Die 0-Seiten eines  $d$ -dimensionalen konvexen Polyeders sind seine Ecken, die 1-Seiten heißen *Kanten* und die  $(d-1)$ -Seiten *Seitenflächen*.

Eine Punktmenge des  $\mathbb{R}^d$ , die sich als Vereinigung endlich vieler konvexer Polyeder darstellen läßt, heißt *Polyeder*. Diejenigen Polyeder, die die Vereinigung endlich vieler 2-Polytope sind und die außerdem in einer zweidimensionalen Ebene liegen, wer-

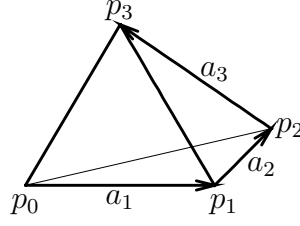


Abbildung 1.1: Dreidimensionales Simplex (Tetraeder) mit ausgezeichnete Ecke  $p_0$  und erzeugenden Kantenvektoren  $a_1, a_2, a_3$

den *Polygone* genannt. Ein Polygon heißt genauer *n-Eck*, wenn sein Rand ein einfach geschlossener Streckenzug aus  $n$  Strecken ist. Diese Strecken sind die *Seiten* des  $n$ -Ecks, ihre Endpunkte die *Ecken*. Ein  $n$ -Eck besitzt also genau  $n$  Ecken. Für konvexe  $n$ -Ecke stimmt diese Definition der Ecken mit der obigen Definition überein. Zwei Ecken eines  $n$ -Ecks heißen *Nachbarecken*, wenn sie zu der selben Seite des  $n$ -Ecks gehören.

Die in einem gewissen Sinne einfachsten Polyeder sind die Simplexe. Ein *d-dimensionales Simplex* ist ein  $d$ -Polytop mit  $d + 1$  Ecken. Hat ein Simplex  $S$  die Ecken  $p_0, \dots, p_d$ , kann es auch mit Hilfe einer *ausgezeichneten Ecke*  $p_0$  und den linear unabhängigen *erzeugenden Kantenvektoren*  $a_i := p_i - p_0, i = 1, \dots, d$ , beschrieben werden:

$$S = \langle p_0; a_1, \dots, a_d \rangle := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = p_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i a_i \text{ mit } 1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0 \right\}.$$

Für einen Punkt  $p_0 \in \mathbb{R}^d$  und linear unabhängige Vektoren  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^d$  heißt das  $d$ -Polytop

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = p_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i a_i \text{ mit } 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_d \leq 1 \right\}$$

*d-Parallelotop* mit ausgezeichnete Ecke  $p_0$  und *erzeugenden Kantenvektoren*  $a_1, \dots, a_d$ . Es läßt sich auch folgendermaßen darstellen  $P = \langle p_0; a_1 \rangle \otimes \langle 0; a_2 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 0; a_d \rangle$ . Dabei ist

$$A \otimes B := \{ x \in \mathbb{R}^d : x = a + b \text{ mit } a \in A, b \in B \}$$

die *Minkowskisumme* zweier Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^d$ . Die Verknüpfung  $\otimes$  nennt man auch *Minkowskische Addition*. Sie ist kommutativ und assoziativ. In Verbindung mit der *Dilatation*  $\lambda C := \{ \lambda c : c \in C \}$  einer Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  mit dem *Ähnlichkeitsfaktor*  $\lambda > 0$  gilt für die Minkowskisumme der Mengen  $A$  und  $B$  folgende Regel

$$\lambda(A \otimes B) = \lambda A \otimes \lambda B.$$

Die Menge der Polyeder ist bezüglich der Minkowskischen Addition abgeschlossen. Insbesondere ist die Minkowskisumme zweier konvexer Polyeder ebenfalls ein konvexes Polyeder.



Ein Polyeder  $P$  heißt *zerlegt* in die Polyeder  $P_1, \dots, P_k$  ( $k \geq 2$ ), symbolisch durch  $P = P_1 + \dots + P_k$  ausgedrückt, wenn einerseits  $P$  die Vereinigungsmenge von  $P_1, \dots, P_k$  ist, und andererseits der Durchschnitt  $P_i \cap P_j$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i \neq j$  keine inneren Punkte besitzt. Die Polyeder  $P_1, \dots, P_k$  heißen dann *Zerlegungspolyeder*,  $P_1 + \dots + P_k$  nennt man *Zerlegung* von  $P$ . Gilt  $P = P_1 + \dots + P_k$  für eine natürliche Zahl  $k \geq 2$  und  $d$ -Polytope  $P, P_1, \dots, P_k$ , so nennt man die Ecken von  $P_1, \dots, P_k$  *Knoten* der Zerlegung. Verbindet man die Zerlegung eines Polyeders mit der Minkowskischen Addition, so ergibt sich für Polyeder  $P, Q$  und  $R$  die distributive Regel

$$(P + Q) \otimes R = (P \otimes R) + (Q \otimes R),$$

unter der Bedingung, daß die Zerlegungen gebildet werden können.

Nun sollen die zentralen Begriffe der Arbeit definiert werden. Dabei wird die Kongruenz zweier Polyeder  $P$  und  $Q$  durch  $P \cong Q$  ausgedrückt und ihre Ähnlichkeit durch  $P \sim Q$ . Ein Polyeder  $P$  heißt *k-selbstähnlich*, wenn es in  $k \geq 2$  zu  $P$  ähnliche Polyeder zerlegt werden kann:

$$P = P_1 + \dots + P_k \text{ mit } P_i \sim P, i = 1, \dots, k.$$

Die Zerlegung  $P_1 + \dots + P_k$  von  $P$  nennt man dann *k-selbstähnliche Zerlegung*. Ein Polyeder  $P$  heißt *selbstähnlich*, wenn es eine natürliche Zahl  $k \geq 2$  gibt, so daß  $P$   $k$ -selbstähnlich ist. Die Abbildung 1.2 zeigt ein 2-selbstähnliches und ein 5-selbstähnliches Dreieck. Das erste Dreieck (ein rechtwinkliges Dreieck) ist also in zwei zu diesem Dreieck ähnliche Dreiecke zerlegbar und das zweite Dreieck (ein Dreieck mit Innenwinkelgrößen  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi$ ) besitzt eine Zerlegung in fünf zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreiecke.

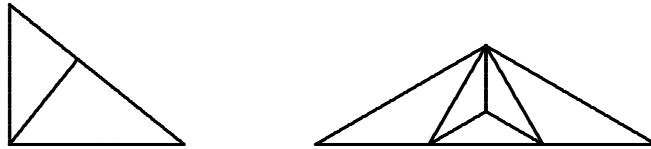


Abbildung 1.2: Ein 2-selbstähnliches und ein 5-selbstähnliches Dreieck

Zwischen einem  $d$ -Polytop  $P$  und den Zerlegungspolyedern einer selbstähnlichen Zerlegung von  $P$  besteht folgende Beziehung:

**Lemma 1.1.** *Ist  $P = P_1 + \dots + P_k$  eine  $k$ -selbstähnliche Zerlegung des  $d$ -Polytops  $P$ , dann gibt es reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ , so daß gilt  $P_i \cong \lambda_i^{1/d} P$  für  $i = 1, \dots, k$ .*

**Beweis.** Es sei  $P$  ein  $d$ -Polytop und  $P = P_1 + \dots + P_k$  eine  $k$ -selbstähnliche Zerlegung von  $P$ . Da  $P$  ähnlich zu  $P_1, \dots, P_k$  ist, existieren reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  mit  $P_i \cong \lambda_i^{1/d} P$  für  $i = 1, \dots, k$ . Das Volumen eines  $d$ -Polytops  $Q$  wird nun mit  $V_d(Q)$  bezeichnet. Dann gilt

$$V_d(P) = V_d(P_1) + \dots + V_d(P_k) = \lambda_1 V_d(P) + \dots + \lambda_k V_d(P).$$

Daraus folgt  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ . □

Eine spezielle Form der Selbstähnlichkeit ist Gegenstand der folgenden Definition. Ein Polyeder  $P$  heißt *k-replizierend*, wenn  $P$  eine Zerlegung in  $k \geq 2$  zu  $P$  ähnliche paarweise kongruente Polyeder besitzt:

$$P = P_1 + \dots + P_k \text{ mit } P_i \cong P_1 \sim P, i = 2, \dots, k.$$

Die Zerlegung heißt dann *k-replizierende Zerlegung*. Ein Polyeder  $P$  heißt *replizierend*, wenn es eine natürliche Zahl  $k \geq 2$  gibt, so daß  $P$  *k-replizierend* ist. Beispiele 4-replizierender Polygone zeigt die Abbildung 1.3.

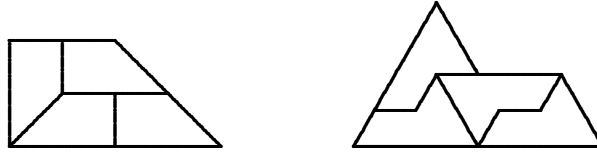


Abbildung 1.3: 4-replizierende  $n$ -Ecke

Da die Zerlegungspolyeder einer replizierenden Zerlegung eines Polyeders  $P$  nicht nur ähnlich zu  $P$  sondern auch paarweise kongruent sind, folgt aus Lemma 1.1:

**Lemma 1.2.** *Ist  $P = P_1 + \dots + P_k$  eine  $k$ -replizierende Zerlegung des  $d$ -Polytops  $P$ , dann gilt  $P_i \cong k^{-1/d} P$  für  $i = 1, \dots, k$ .*

Für die Menge der natürlichen Zahlen  $\{1, 2, \dots\}$  wird in dieser Arbeit  $\mathbb{N}$  geschrieben,  $\mathbb{N}_0$  steht für die Menge  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ .

## Kapitel 2

### Selbstähnlichkeit konvexer $n$ -Ecke

Will man die selbstähnlichen konvexen  $n$ -Ecke untersuchen, bietet es sich an, zunächst die  $n$ -Ecke zu bestimmen, die sich in  $k \geq 2$  konvexe  $n$ -Ecke zerlegen lassen.

**Satz 2.1.** *Für die Zerlegung konvexer  $n$ -Ecke in konvexe  $n$ -Ecke gilt:*

- a) *Ist ein konvexes  $n$ -Eck in  $k \geq 2$  konvexe  $n$ -Ecke zerlegt, so muß  $3 \leq n \leq 5$  gelten.*
- b) *Jedes Dreieck kann für alle  $k \geq 2$  in  $k$  Dreiecke zerlegt werden.*
- c) *Jedes konvexe Viereck kann für alle  $k \geq 2$  in  $k$  konvexe Vierecke zerlegt werden.*
- d) *Ein konvexes Fünfeck kann genau dann in  $k$  konvexe Fünfecke zerlegt werden, wenn  $k \geq 6$  ist.*

Einen Beweis des Teils a) des Satzes findet man in [15], einen Beweis des Teils d) in [3]. Unmittelbar aus Satz 2.1 folgt, daß für  $n \geq 6$  kein konvexes  $n$ -Eck selbstähnlich ist. In den folgenden Abschnitten werden Dreiecke, konvexe Vierecke und konvexe Fünfecke hinsichtlich Selbstähnlichkeit untersucht. Insbesondere werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein Dreieck, ein konvexes Viereck oder ein konvexes Fünfeck  $k$ -replizierend ist. Dabei sind alle betrachteten  $n$ -Ecke konvex, auch wenn dies nicht explizit angegeben wird.

Die Innenwinkelgrößen eines  $n$ -Ecks werden im Folgenden mit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  bezeichnet. Die Ecken der  $n$ -Ecke werden außerdem so numeriert, daß gilt:  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ , wobei der zur Ecke mit der Nummer  $e \in \{1, \dots, n\}$  gehörende Innenwinkel die Größe  $\alpha_e$  hat. Wenn zwei Innenwinkel die gleiche Größe haben und kein weiteres Kriterium angegeben wird, soll eine der möglichen Numerierungen willkürlich ausgewählt werden. Ist  $P$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes  $n$ -Eck, d. h. gilt  $P = P_1 + \dots + P_k$  mit  $P_i \sim P$ ,  $i = 1, \dots, k$ , so soll die Numerierung der Ecken von  $P$  auf die Ecken der zu  $P$  ähnlichen  $n$ -Ecke  $P_i$  übertragen werden. Einander entsprechende Ecken von  $P$  und  $P_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , besitzen also die gleiche Nummer. Die *Eckenreihenfolge* eines  $n$ -Ecks ergibt sich, wenn der Rand des  $n$ -Ecks beginnend bei der Ecke mit der Nummer 1 in mathematisch positiver oder negativer Richtung durchlaufen wird (vgl. Abbildung 2.1).

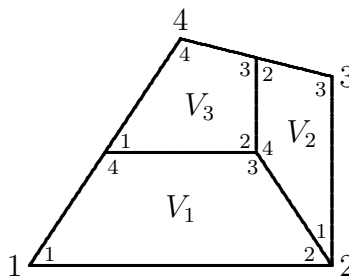
Um die Beweise anschaulicher zu machen, werden bei einer Zerlegung  $P = P_1 + \dots + P_k$  eines  $n$ -Ecks  $P$  in die  $n$ -Ecke  $P_1, \dots, P_k$  folgende Sprechweisen verwendet:



Abbildung 2.1: Vierecke mit Eckenreihenfolge 1, 4, 3, 2

- Die Ecke  $d$  des Zerlegungspolygons  $P_i$  liegt in der Ecke  $e$  von  $P$ . Das bedeutet, die Ecke mit der Nummer  $d$  von  $P_i$  fällt mit der Ecke mit der Nummer  $e$  von  $P$  zusammen.
- Die Ecke  $d$  des Zerlegungspolygons  $P_i$  stimmt mit der Ecke  $e$  von  $P$  überein. Das bedeutet, die Ecke mit der Nummer  $d$  von  $P_i$  ist die einzige Ecke eines Zerlegungspolygons, die mit der Ecke mit der Nummer  $e$  von  $P$  zusammenfällt.
- Die Ecke  $d$  des Zerlegungspolygons  $P_i$  stimmt mit der Ecke  $e$  des Zerlegungspolygons  $P_j$  überein. Das bedeutet, die Ecke mit der Nummer  $d$  des Zerlegungspolygons  $P_i$  fällt mit der Ecke mit der Nummer  $e$  des Zerlegungspolygons  $P_j$  zusammen.
- Die Ecke  $d$  des Zerlegungspolygons  $P_i$  liegt in einem Randpunkt von  $P$  bzw. im relativen Inneren einer Strecke  $s$ . Das bedeutet, die Ecke mit der Nummer  $d$  des Zerlegungspolygons  $P_i$  fällt mit einem Randpunkt von  $P$  bzw. mit einem Punkt aus dem relativen Inneren einer Strecke  $s$  zusammen.

Zum Beispiel stimmt bei der Zerlegung  $V = V_1 + V_2 + V_3$  aus Abbildung 2.2 die Ecke 1 von  $V_1$  mit der Ecke 1 von  $V$  überein, die Ecke 2 von  $V_1$  liegt in der Ecke 2 von  $V$ , die Ecke 3 von  $V_1$  stimmt mit der Ecke 4 von  $V_2$  und mit der Ecke 2 von  $V_3$  überein, die Ecke 4 von  $V_1$  liegt im relativen Inneren einer Seite von  $V$ .


 Abbildung 2.2: Zerlegung eines Vierecks  $V$  in die Vierecke  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ 

Bevor die selbstähnlichen Dreiecke, Vierecke und Fünfecke in den nächsten Abschnitten getrennt untersucht werden, sollen einige Aussagen, die für selbstähnliche Zerlegungen beliebiger  $n$ -Ecke zutreffen, bewiesen werden.

**Lemma 2.2.** Für eine  $k$ -selbstähnliche Zerlegung eines konvexen  $n$ -Ecks  $P$  gilt:

- a) Im relativen Inneren der längsten Seite von  $P$  liegen Ecken von Zerlegungspolygonen.
- b) Liegt die Ecke mit der Nummer  $e$  eines Zerlegungspolygons im relativen Inneren einer Seite von  $P$  oder im relativen Inneren einer Seite eines Zerlegungspolygons, dann gilt für die Größe des zugehörigen Innenwinkels die Beziehung  $\alpha_1 + \alpha_e \leq \pi$ .
- c) Liegt die Ecke mit der Nummer  $e$  eines Zerlegungspolygons in der Ecke  $e$  von  $P$  und haben die Nachbarecken der Ecke  $e$  von  $P$  die Nummern  $d_1$  und  $d_2$ , dann gilt

$$h_1\alpha_1 + \dots + h_n\alpha_n + \alpha_{d_1} = \pi \quad \text{und} \quad l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n + \alpha_{d_2} = \pi$$

mit  $h_1, \dots, h_n, l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}_0$  und  $h_1 + \dots + h_n \geq 1$ ,  $l_1 + \dots + l_n \geq 1$ . Insbesondere gilt  $\alpha_1 + \alpha_{d_1} \leq \pi$  und  $\alpha_1 + \alpha_{d_2} \leq \pi$ .

**Beweis.** Sei  $P = P_1 + \dots + P_k$  eine  $k$ -selbstähnliche Zerlegung eines konvexen  $n$ -Ecks  $P$ . Dann kann wegen  $k \geq 2$  und  $P_i \sim P$ ,  $i = 1, \dots, k$ , die längste Seite von  $P$  nicht mit einer Seite eines Zerlegungspolygons  $P_i$  übereinstimmen. Daraus ergibt sich die Aussage a) des Lemmas.

Liegt die Ecke mit der Nummer  $e$  eines Zerlegungspolygons im relativen Inneren einer Seite von  $P$  oder von  $P_1, \dots, P_k$ , dann muß der zugehörige Innenwinkel durch Innenwinkel anderer Zerlegungspolygone zu einem Winkel der Größe  $\pi$  ergänzt werden. Da  $\alpha_1$  die kleinste Größe eines Innenwinkels ist, folgt  $\alpha_1 + \alpha_e \leq \pi$ .

Jetzt soll die Ecke mit der Nummer  $e$  eines Zerlegungspolygons  $P_{i_0}$ ,  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ , in der Ecke  $e$  von  $P$  liegen. Außerdem sollen die Nachbarecken der Ecke  $e$  von  $P$  und damit auch die Nachbarecken der Ecke  $e$  von  $P_{i_0}$  die Nummern  $d_1$  und  $d_2$  haben. Dann gilt: Die Ecke  $d_1$  von  $P_{i_0}$  kann nicht in der Ecke  $d_1$  von  $P$  und die

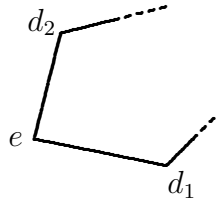


Abbildung 2.3: Ecke  $e$  hat Nachbarecken mit den Nummern  $d_1$  und  $d_2$

Ecke  $d_2$  von  $P_{i_0}$  kann nicht in der Ecke  $d_2$  von  $P$  liegen, da sonst eine Seite von  $P_{i_0}$  mit der entsprechenden Seite von  $P$  übereinstimmen würde. Außerdem kann nicht gleichzeitig die Ecke mit der Nummer  $d_1$  von  $P_{i_0}$  in der Ecke  $d_2$  von  $P$  und die Ecke mit der Nummer  $d_2$  in der Ecke  $d_1$  von  $P$  liegen. Denn dies hätte zur Folge, daß einander entsprechende Seiten von  $P_{i_0}$  und  $P$  die gleiche Länge haben. Deshalb muß für die Ecken mit den Nummern  $d_1$  und  $d_2$  von  $P_{i_0}$  einer der folgenden Fälle eintreten

- (i) Ecke  $d_1$  und Ecke  $d_2$  von  $P_{i_0}$  liegen im relativen Inneren einer Seite von  $P$ ,

- (ii) Ecke  $d_1$  von  $P_{i_0}$  liegt im relativen Inneren einer Seite von  $P$ , Ecke  $d_2$  von  $P_{i_0}$  liegt in der Ecke  $d_1$  von  $P$ ,
- (iii) Ecke  $d_1$  von  $P_{i_0}$  liegt in der Ecke  $d_2$  von  $P$ , Ecke  $d_2$  von  $P_{i_0}$  liegt im relativen Inneren einer Seite von  $P$ .

Im Fall (i) müssen die Innenwinkel der Größe  $\alpha_{d_1}$  und  $\alpha_{d_2}$  von  $P_{i_0}$  durch Innenwinkel anderer Zerlegungspolygone zu einem Winkel der Größe  $\pi$  ergänzt werden. Im Fall (ii) muß der Innenwinkel der Größe  $\alpha_{d_1}$  zu einem Winkel der Größe  $\pi$  und der Innenwinkel der Größe  $\alpha_{d_2}$  zu einem Winkel der Größe  $\alpha_{d_1}$  ergänzt werden. Im Fall (iii) muß schließlich der Innenwinkel der Größe  $\alpha_{d_1}$  zu einem Winkel der Größe  $\alpha_{d_2}$  und der Innenwinkel der Größe  $\alpha_{d_2}$  zu einem Winkel der Größe  $\pi$  ergänzt werden. Es müssen also in allen drei Fällen Zahlen  $h_1, \dots, h_n, l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}_0$  mit  $h_1 + \dots + h_n \geq 1$ ,  $l_1 + \dots + l_n \geq 1$  existieren, so daß  $h_1\alpha_1 + \dots + h_n\alpha_n + \alpha_{d_1} = \pi$  und  $l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n + \alpha_{d_2} = \pi$  gilt. Da  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$  ist, folgt daraus  $\alpha_1 + \alpha_{d_1} \leq \pi$  und  $\alpha_1 + \alpha_{d_2} \leq \pi$ . Somit ist auch der Teil c) des Lemmas bewiesen.  $\square$

## 2.1 Selbstähnliche und replizierende Dreiecke

Für selbstähnliche Dreiecke existiert eine vollständige Klassifikation [9, 18].

- Satz 2.3.** a) Jedes Dreieck ist  $k$ -selbstähnlich für  $k = 4$  und  $k \geq 6$ .  
 b) Ein Dreieck ist genau dann 2-selbstähnlich, wenn es rechtwinklig ist.  
 c) Ein Dreieck ist genau dann 3-selbstähnlich, wenn es rechtwinklig ist.  
 d) Ein Dreieck ist genau dann 5-selbstähnlich, wenn es rechtwinklig ist oder Innenwinkel der Größe  $\frac{2\pi}{3}$  und  $\frac{\pi}{6}$  hat.

Jedes Dreieck ist also selbstähnlich und für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  existiert ein  $k$ -selbstähnliches Dreieck. Das Konstruktionsprinzip einer selbstähnlichen Zerlegung veranschaulicht für den Fall a) des Satzes 2.3 die Abbildung 2.4 und für den Fall d) die Abbildung 2.5.

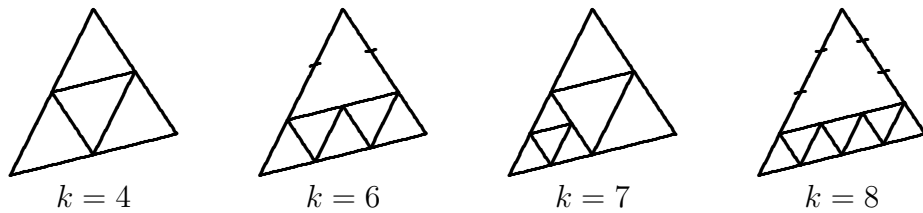


Abbildung 2.4:  $k$ -selbstähnliche Zerlegung eines beliebigen Dreiecks

Snover, Waiveris und Williams haben für replizierende Dreiecke folgenden Satz bewiesen [20].

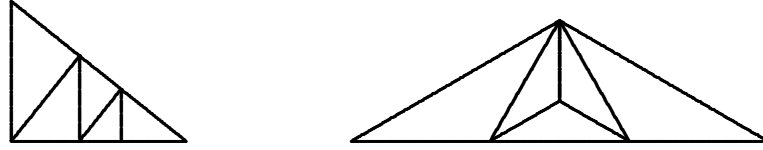


Abbildung 2.5: 5-selbstähnliche Zerlegung eines rechtwinkligen Dreiecks und eines Dreiecks mit den Innenwinkelgrößen  $\frac{2\pi}{3}$  und  $\frac{\pi}{6}$

**Satz 2.4.** Ein Dreieck  $S$  ist genau dann  $k$ -replizierend, wenn gilt

- a)  $S$  ist ein beliebiges Dreieck und  $k = m^2$  ( $m \geq 2$ ) oder
- b) die Innenwinkel von  $S$  haben die Größe  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  und  $k = 3m^2$  ( $m \geq 1$ ) oder
- c)  $S$  ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathetenlängen das Verhältnis  $m : l$  haben, und  $k = m^2 + l^2$  ( $m, l \geq 1$ ).

Somit ist jedes Dreieck sogar replizierend. Es existiert aber nicht für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  ein  $k$ -replizierendes Dreieck. Natürliche Zahlen der Form  $k = 4^a(8b + 7)$  mit  $a, b \in \mathbb{N}_0$  lassen sich nicht als Summe von weniger als vier Quadratzahlen darstellen [4]. Für diese Zahlen gibt es demnach kein  $k$ -replizierendes Dreieck.

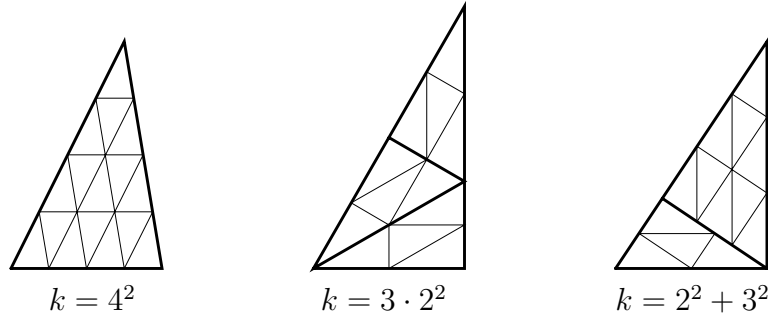


Abbildung 2.6:  $k$ -replizierende Dreiecke

Eine  $k$ -replizierende Zerlegung eines Dreiecks erhält man im Fall  $k = m^2$ , indem man jede Dreiecksseite durch  $m - 1$  Punkte in  $m$  Strecken gleicher Länge unterteilt. Parallelen zu den Dreiecksseiten durch diese Punkte zerlegen das Dreieck in  $m^2$  kongruente Teildreiecke. Im Fall b) des Satzes 2.4 wird das entsprechende Dreieck zunächst in drei kongruente, zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke wird anschließend in  $m^2$  kongruente Dreiecke zerlegt. Im Fall c) kann man das Dreieck so in zwei zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreiecke zerlegen, daß man durch die Zerlegung dieser Teildreiecke in  $m^2$  bzw.  $l^2$  Dreiecke insgesamt  $m^2 + l^2$  kongruente, zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreiecke erhält. Ein Beispiel eines replizierenden Dreiecks mit der entsprechenden Zerlegung zeigt für jeden Fall die Abbildung 2.6.

## 2.2 Selbstähnliche und replizierende konvexe Vierecke

Im Gegensatz zu den Dreiecken sind die  $k$ -selbstähnlichen und die  $k$ -replizierenden Vierecke nicht vollständig klassifiziert. Aussagen gibt es nur für  $k = 2, 3$  [17] und  $k = 4$  [21].

**Satz 2.5.** a) Ein Viereck ist genau dann 2-selbstähnlich, wenn es ein Parallelogramm mit dem Seitenverhältnis  $1 : \sqrt{2}$  ist.

b) Ein Viereck  $V$  ist genau dann 3-selbstähnlich, wenn gilt

- $V$  ist ein Parallelogramm mit dem Seitenverhältnis  $1 : \sqrt{2}$ ,  $1 : \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2} : \sqrt{3}$  oder  $1 : \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$  oder
- $V$  ist ein Trapez mit Winkeln der Größe  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  und dem Verhältnis  $2 : 1$  der parallelen Seiten oder
- $V$  ist ein rechtwinkliges Sehnenviereck, in dem sich die Diagonalen so schneiden, daß sich die Abschnitte einer Diagonale wie die Quadrate der Abschnitte der anderen Diagonale verhalten.

c) Ein Viereck  $V$  ist genau dann 4-selbstähnlich, wenn gilt

- $V$  ist ein Parallelogramm oder
- $V$  ist ein Trapez mit dem Verhältnis  $2 : 1$  der parallelen Seiten und Winkeln der Größe  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  oder  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oder  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oder
- $V$  ist ein Trapez, so daß für die Länge der parallelen Seiten  $a$  und  $b$  und eine weitere Seite  $c$  gilt  $|c| = \sqrt{|a||b|}$ .

Die Abbildung 2.7 zeigt die Typen 4-selbstähnlicher Vierecke. Neben den Parallelogrammen sind auch die Trapeze (i), (ii) und (iii) replizierend.

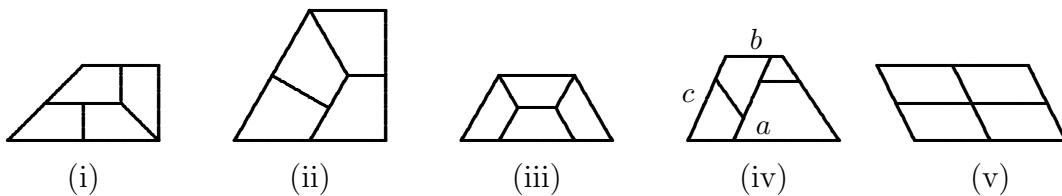


Abbildung 2.7: 4-selbstähnliche Vierecke



**Satz 2.6.** a) Ein Viereck ist genau dann 2-replizierend, wenn es ein Parallelogramm mit dem Seitenverhältnis  $1 : \sqrt{2}$  ist.  
 b) Ein Viereck ist genau dann 3-replizierend, wenn es ein Parallelogramm mit dem Seitenverhältnis  $1 : \sqrt{3}$  ist.  
 c) Ein Viereck ist genau dann 4-replizierend, wenn es ein beliebiges Parallelogramm oder ein Trapez mit dem Verhältnis  $2 : 1$  der parallelen Seiten und Winkeln der Größe  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  oder  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  oder  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  ist.

Doyen und Landuyt äußern in [8] die Vermutung, daß jedes replizierende Viereck ein Trapez ist. Hier soll gezeigt werden, daß jedes replizierende Viereck ein Trapez oder ein Sehnenviereck ist. Ein replizierendes Sehnenviereck, das kein Trapez ist, ist jedoch nicht bekannt.

Zunächst werden notwendige Bedingungen für die Selbstähnlichkeit von konvexen Vierecken bewiesen. Dabei werden die Ecken der Vierecke wie auf Seite 9 erläutert numeriert. Zur Beschreibung von Eigenschaften einer Zerlegung eines Vierecks werden die auf Seite 9 eingeführten Sprechweisen verwendet.

**Lemma 2.7.** Ist ein konvexes Viereck selbstähnlich, dann gilt  $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Beweis.** Sei  $V$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes Viereck, d. h. es gibt zu  $V$  ähnliche Vierecke  $V_1, \dots, V_k$  mit  $V = V_1 + \dots + V_k$ . Angenommen, es gilt  $\alpha_2 > \frac{\pi}{2}$ . Aus  $\frac{\pi}{2} < \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$  und  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$  folgt  $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ . Somit gilt  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

Um die Annahme zu einem Widerspruch zu führen, wird die Zerlegung  $V = V_1 + \dots + V_k$  am Rand von  $V$  untersucht. Liegen in einem Randpunkt von  $V$  die Ecken mit den Nummern  $e_1, \dots, e_l$  von Zerlegungsvierecken, dann kann die Summe der zugehörigen Innenwinkelgrößen  $\alpha_{e_1} + \dots + \alpha_{e_l}$  nicht größer als  $\pi$  sein. Da andererseits  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > \frac{\pi}{2}$  gilt, kann in jedem Randpunkt von  $V$  höchstens eine Ecke mit einer Nummer ungleich 1 der Zerlegungsvierecke liegen. Ferner muß wegen  $\alpha_1 < \alpha_2$  in der Ecke 1 von  $V$  die Ecke 1 eines Zerlegungsvierecks  $V_{i_0}$ ,  $i_0 \in \{i, \dots, k\}$ , liegen. Beides kann nicht gleichzeitig gelten, da  $V$  sonst nicht in endlich viele zu  $V$  ähnliche Vierecke zerlegt sein könnte. Um dies zu sehen, werden jetzt die Zerlegungsvierecke betrachtet, von denen mindestens eine Seite auf dem Rand von  $V$  liegt. Diese Vierecke werden im Folgenden *Randvierecke* genannt. Bei der Zerlegung  $V = V_1 + \dots + V_k$  wird der Rand von  $V$  in endlich viele Seiten von Randvierecken zerlegt.

Da die Ecke 1 von  $V_{i_0}$  mit der Ecke 1 von  $V$  übereinstimmt, liegen zwei Ecken mit den Nummern  $d_1 \neq 1$  und  $d_2 \neq 1$  von  $V_{i_0}$  in einem Randpunkt von  $V$  und stimmen mit Ecken anderer Randvierecke überein. Weil  $d_1 \neq 1$  und  $d_2 \neq 1$  ist, muß nach den obigen Überlegungen die Ecke  $d_1$  von  $V_{i_0}$  mit der Ecke 1 eines Randvierecks  $V_{i_1}$ ,  $i_1 \in \{i, \dots, k\} \setminus \{i_0\}$ , und die Ecke  $d_2$  von  $V_{i_0}$  mit der Ecke 1 eines Randvierecks  $V_{i_2}$ ,  $i_2 \in \{i, \dots, k\} \setminus \{i_0\}$ , übereinstimmen (siehe Abbildung 2.8). Es gilt  $i_1 \neq i_2$ . Außerdem können  $V_{i_1}$  und  $V_{i_2}$  in keinem Randpunkt zusammentreffen, d. h. die Seiten von  $V_{i_0}$ ,  $V_{i_1}$  und  $V_{i_2}$  ergeben keine Zerlegung des Randes von  $V$ .

Somit gibt es eine Ecke  $d_3 \neq 1$  von  $V_{i_1}$ , die in einem Randpunkt von  $V$  liegt und die mit der Ecke 1 eines Randvierecks  $V_{i_3}$ ,  $i_3 \in \{i, \dots, k\} \setminus \{i_0, i_1, i_2\}$ , übereinstimmt.

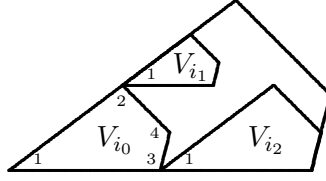


Abbildung 2.8: Die Ecke  $d_1 = 2$  von  $V_{i_0}$  stimmt mit der Ecke 1 von  $V_{i_1}$  und die Ecke  $d_2 = 3$  von  $V_{i_0}$  stimmt mit der Ecke 1 von  $V_{i_2}$  überein

Außerdem gibt es eine Ecke  $d_4 \neq 1$  von  $V_{i_2}$ , die in einem Randpunkt von  $V$  liegt und die mit der Ecke 1 eines Randvierecks  $V_{i_4}$ ,  $i_4 \in \{i, \dots, k\} \setminus \{i_0, i_1, i_2\}$ , übereinstimmt. Die Vierecke  $V_{i_3}$  und  $V_{i_4}$  sind verschieden. Außer in den Ecken  $d_1, d_2, d_3, d_4$  können die Vierecke  $V_{i_0}, V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}, V_{i_4}$  in keinem Randpunkt von  $V$  zusammentreffen, d. h. die Seiten von  $V_{i_0}, V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$  und  $V_{i_4}$  ergeben keine Zerlegung des Randes von  $V$ .

Es muß also weitere Randvierecke geben. Wenn man diese Betrachtungen fortsetzt, sieht man, daß der Rand von  $V$  nicht in endlich viele Seiten von Randvierecken zerlegt sein kann.  $\square$

Im Gegensatz zu den Dreiecken ergibt sich aus Lemma 2.7 für Vierecke, daß nicht jedes konvexe Viereck selbstähnlich ist.

**Lemma 2.8.** *Ist ein konvexes Viereck selbstähnlich, dann gilt  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$ .*

**Beweis.** Der Beweis basiert auf einer Idee von U. Betke [2]. Sei  $V$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes Viereck, d. h.  $V = V_1 + \dots + V_k$  mit  $V_i \sim V$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Angenommen, es gilt  $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$ . Daraus folgt  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$ . Somit gilt  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 < \frac{\pi}{2} < \alpha_4$ .

Um die Annahme zu einem Widerspruch zu führen, wird wieder die selbstähnliche Zerlegung  $V = V_1 + \dots + V_k$  am Rand von  $V$  betrachtet. Eine Ecke mit der Nummer 4 eines Zerlegungsvierecks kann nur dann auf dem Rand von  $V$  liegen, wenn sie in der Ecke 4 von  $V$  liegt. Denn sie kann wegen  $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$  nicht im relativen Inneren einer Seite von  $V$  (Lemma 2.2) und wegen  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 < \alpha_4$  nicht in der Ecke 1, 2 oder 3 von  $V$  liegen.

Es werden jetzt folgende Fälle unterschieden

1. Fall:  $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3$ ,
2. Fall:  $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3$ ,
3. Fall:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ .

Zunächst wird der 1. Fall untersucht. Die Reihenfolge der Ecken von  $V$  sei  $1, d, e, f$  mit  $d, e, f \in \{2, 3, 4\}$  (siehe Abbildung 2.9).

Wegen  $\alpha_1 < \alpha_2$  muß in der Ecke 1 von  $V$  die Ecke 1 eines Zerlegungsvierecks liegen. Nach Lemma 2.2 gilt demnach für die zu den Nachbarecken  $d$  und  $f$  der Ecke 1 gehörenden Innenwinkel:  $\alpha_1 + \alpha_d \leq \pi$  und  $\alpha_1 + \alpha_f \leq \pi$ . Zusammen mit der Annahme

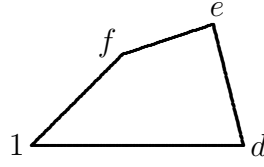


Abbildung 2.9: Numerierung der Ecken im 1. Fall

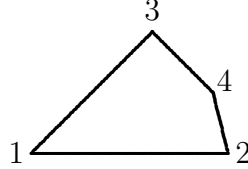


Abbildung 2.10: Viereck mit Eckenreihenfolge 1,2,4,3

folgt daraus  $d, f \in \{2, 3\}$  und  $e = 4$ . Das Viereck  $V$  hat also die Eckenreihenfolge 1,2,4,3.

In der Ecke 2 von  $V$  kann keine Ecke 2 eines Zerlegungsvierecks liegen. Denn sonst müßte nach Lemma 2.2 gelten  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$ . Mit der gleichen Begründung folgt, daß in der Ecke 3 von  $V$  keine Ecke 3 eines Zerlegungsvierecks liegen kann. Da  $\alpha_2 \leq \alpha_3 < \alpha_4$  gilt, kann weder in der Ecke 2 noch in der Ecke 3 von  $V$  eine Ecke 4 liegen. Im Fall  $\alpha_2 < \alpha_3$  kann in der Ecke 2 von  $V$  auch keine Ecke 3 liegen. In der Ecke 2 liegen dann also ausschließlich Ecken 1 von Zerlegungsvierecken und in der Ecke 3 von  $V$  ausschließlich Ecken 1 und 2 von Zerlegungsvierecken. Demzufolge muß gelten  $\alpha_2 = n_2\alpha_1$  mit  $n_2 \in \mathbb{N}$  und  $\alpha_3 = j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2$  mit  $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ . Für  $\alpha_3$  ergibt sich daraus  $\alpha_3 = n_3\alpha_1$  mit  $n_3 := j_1 + j_2n_2 \in \mathbb{N}$ . Im Fall  $\alpha_2 = \alpha_3$  kann nicht gleichzeitig in der Ecke 2 von  $V$  eine Ecke 3 und in der Ecke 3 von  $V$  eine Ecke 2 eines Zerlegungsvierecks liegen. Denn sonst müßten zwei Ecken 4 von Zerlegungsvierecken auf dem Rand von  $V$  liegen. Dies steht im Widerspruch zu den obigen Überlegungen. In der Ecke 2 oder in der Ecke 3 von  $V$  liegen also ausschließlich Ecken 1 von Zerlegungsvierecken. Deshalb gilt auch in diesem Fall  $\alpha_2 = n_2\alpha_1$  und  $\alpha_3 = n_3\alpha_1$  mit  $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ .

Im relativen Inneren der längsten Seite von  $V$  liegen Ecken von Zerlegungsvierecken (Lemma 2.2). Deshalb müssen Innenwinkel von Zerlegungsvierecken existieren, deren Größen sich zu  $\pi$  summieren. Da  $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$  ist, gibt es somit Zahlen  $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{N}_0$  mit  $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 = \pi$ . Zusammen mit  $\alpha_2 = n_2\alpha_1, \alpha_3 = n_3\alpha_1$  ( $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ ) folgt

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{n_1}$$

mit  $n_1 := l_1 + l_2n_2 + l_3n_3$ . Damit erhält man

$$\alpha_4 = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{2n_1 - 1 - n_2 - n_3}{n_1} \pi.$$

Aus  $\alpha_4 < \pi$  und  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  folgt jetzt  $2n_1 - 1 - n_2 - n_3 + 1 \leq n_1$ . Somit gilt  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$  im Widerspruch zur Annahme.

Als nächstes soll der 2. Fall betrachtet werden. Die Freiheit bei der Numerierung der Ecken, die man wegen  $\alpha_1 = \alpha_2$  hat, kann so ausgenutzt werden, daß die Eckenreihenfolge von  $V$  gleich 1,2,4,3 oder gleich 1,3,2,4 ist.

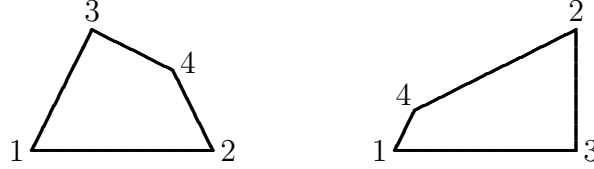


Abbildung 2.11: Numerierung der Ecken im 2. Fall

Würde in der Ecke 1 von  $V$  eine Ecke 1 liegen, erhielte man analog zum 1. Fall einen Widerspruch. In der Ecke 1 von  $V$  muß demnach wegen  $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$  die Ecke 2 eines Zerlegungsvierecks liegen. Da die Ecke 4 eines Zerlegungsvierecks nur dann in einem Randpunkt von  $V$  liegen kann, wenn sie mit der Ecke 4 von  $V$  übereinstimmt, kann somit die Eckenreihenfolge nicht gleich 1,2,4,3 sein. Aber auch wenn die Eckenreihenfolge gleich 1,3,2,4 ist, ergibt sich ein Widerspruch. Denn wegen  $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$  muß die Ecke 2 von  $V$  mit der Ecke 1 oder mit der Ecke 2 eines Zerlegungsvierecks übereinstimmen. Ist die Eckenreihenfolge gleich 1,3,2,4, müßte also sowohl die Ecke 4 dieses Zerlegungsvierecks als auch die Ecke 4 des Zerlegungsvierecks, dessen Ecke 2 mit der Ecke 1 von  $V$  übereinstimmt, auf dem Rand von  $V$  liegen. Nach den obigen Überlegungen kann aber höchstens eine Ecke 4 auf dem Rand von  $V$  liegen. Der 2. Fall kann also nicht eintreten.

Da es bei einer selbstähnlichen Zerlegung eines Vierecks, für das  $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$  ist, Zahlen  $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{N}_0$  mit  $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 = \pi$  geben muß (vgl. 1. Fall), gilt im 3. Fall die Beziehung  $\alpha_1 = \frac{\pi}{n_1}$  mit  $n_1 := l_1 + l_2 + l_3 \in \mathbb{N}$ . Aus  $\alpha_4 = 2\pi - 3\alpha_1 = \frac{2n_1 - 3}{n_1}\pi$  und  $\alpha_4 < \pi$  folgt  $2n_1 - 3 + 1 \leq n_1$ . Damit ergibt sich  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Satz 2.9.** Jedes replizierende konvexe Viereck ist ein Trapez oder ein Sehnenviereck.

**Beweis.** Sei  $V$  ein  $k$ -replizierendes konvexes Viereck, d. h.  $V = V_1 + \dots + V_k$  mit  $V_i \cong V_1 \sim V$ ,  $i = 2, \dots, k$ . Die Eckenreihenfolge von  $V$  sei 1,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  mit  $d, e, f \in \{2, 3, 4\}$  und  $d = 2$  oder  $e = 2$ .

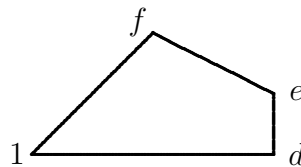


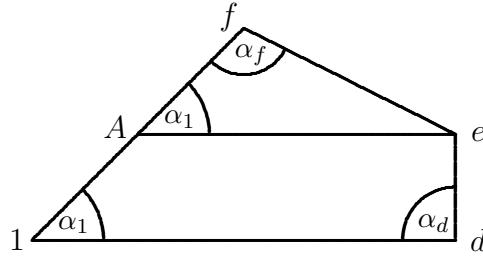
Abbildung 2.12: Viereck mit Eckenreihenfolge 1,  $d$ ,  $e$ ,  $f$

Zu zeigen ist, daß  $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$  gilt. Angenommen, es gilt  $\alpha_1 + \alpha_4 \neq \pi$ . Da bei einem selbstähnlichen Viereck  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$  ist (Lemma 2.8), muß dann

$\alpha_1 + \alpha_4 < \pi$  gelten. Daraus folgt  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$ . Mit  $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$  (Lemma 2.7) ergibt sich nun  $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} < \alpha_3 \leq \alpha_4$ .

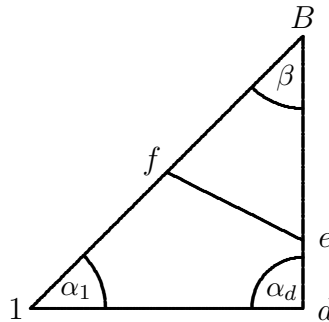
Wegen  $\alpha_1 < \alpha_2$  muß in der Ecke 1 von  $V$  die Ecke 1 eines Zerlegungsvierecks liegen. Nach Lemma 2.2 gilt somit für die zu den Nachbarecken  $d$  und  $f$  der Ecke 1 gehörenden Innenwinkel:  $h_1\alpha_1 + \dots + h_4\alpha_4 + \alpha_d = \pi$  und  $l_1\alpha_1 + \dots + l_4\alpha_4 + \alpha_f = \pi$  mit  $h_1, \dots, h_4, l_1, \dots, l_4 \in \mathbb{N}_0$ . Für die Größe des Innenwinkels bei der Ecke  $f \in \{3, 4\}$  folgt daraus zusammen mit  $\alpha_1 + \alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_4 < \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_4 \geq \alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  die Ungleichung  $2\alpha_1 + \alpha_f \leq \pi$ . Da  $\alpha_d \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$  oder  $\alpha_d < \alpha_f$  ist, gilt für die Größe des Innenwinkels bei der Ecke  $d$  die Ungleichung  $2\alpha_1 + \alpha_d \leq \pi$ .

Eine Strecke mit den Endpunkten  $e_1$  und  $e_2$  wird nun mit  $s(e_1, e_2)$  bezeichnet, die Länge dieser Strecke mit  $|s(e_1, e_2)|$ . Für die Seitenlängen von  $V$  (und damit auch für die Seitenlängen der Zerlegungsvierecke  $V_i$ ) gilt  $|s(1, d)| > |s(e, f)|$ . Zum Beweis kann man das Dreieck mit den Ecken  $e, f$  und  $A$  betrachten, wobei der Punkt  $A$  wie folgt definiert ist:  $A$  liegt im relativen Inneren der Seite  $s(1, f)$  von  $V$ , und die Strecke  $s(A, e)$  ist parallel zu  $s(1, d)$ . Der Punkt  $A$  existiert, da wegen  $2\alpha_1 + \alpha_f \leq \pi$  gilt  $\alpha_1 + \alpha_f < \pi$ . Aus  $\alpha_1 < \alpha_f$  folgt für die Seitenlängen des Dreiecks  $|s(A, e)| > |s(e, f)|$ .


 Abbildung 2.13: Definition des Punktes  $A$ 

Da wegen  $\alpha_1 + \alpha_d < \pi$  außerdem  $|s(1, d)| > |s(A, e)|$  ist, erhält man  $|s(1, d)| > |s(e, f)|$ . Analog ergibt sich  $|s(1, f)| > |s(d, e)|$ .

Desweiteren gilt  $|s(1, d)| > |s(d, e)|$ . Dazu betrachte man das Dreieck mit den Ecken 1,  $d$  und  $B$ , wobei  $B$  der Schnittpunkt der Gerade durch die Ecken 1,  $f$  von  $V$  mit der Gerade durch die Ecken  $d, e$  ist. Dieser Schnittpunkt existiert, da  $\alpha_1 + \alpha_d < \pi$  ist.


 Abbildung 2.14: Definition des Punktes  $B$

Aus  $2\alpha_1 + \alpha_d \leq \pi$  folgt, daß der Innenwinkel des Dreiecks bei  $B$  nicht kleiner als der Innenwinkel des Dreiecks bei  $1$  ist. Somit gilt  $|s(1, d)| \geq |s(d, B)|$ . Mit  $|s(d, B)| > |s(d, e)|$  ergibt sich  $|s(1, d)| > |s(d, e)|$ . Analog erhält man  $|s(1, f)| > |s(e, f)|$ .

Sei  $V_{i_0}$ ,  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ , das Zerlegungsviereck, dessen Ecke  $1$  mit der Ecke  $1$  von  $V$  übereinstimmt. Jetzt wird die replizierende Zerlegung von  $V$  am Rand von  $V_{i_0}$  betrachtet. Für die Lage der Ecke  $2$  von  $V$  werden zwei Fälle unterschieden. Zunächst gelte  $d = 2$  und  $e, f \in \{3, 4\}$ . Aus  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  folgt dann  $\alpha_2 + \alpha_e > \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_f > \pi$ .

Wegen  $\alpha_2 < \alpha_f$  kann die Ecke  $f$  von  $V_{i_0}$  nicht in der Ecke  $2$  von  $V$  liegen. Da einander entsprechende Seiten von  $V$  und  $V_{i_0}$  nicht übereinstimmen, kann sie auch nicht in der Ecke  $f$  von  $V$  liegen. Deshalb liegt die Ecke  $f$  des Zerlegungsvierecks  $V_{i_0}$  im relativen Inneren einer Seite von  $V$ . Sie muß also mit Ecken anderer Zerlegungsvierecke übereinstimmen, so daß sich die zugehörigen Innenwinkel zu einem Winkel der Größe  $\pi$  ergänzen. Wegen  $\alpha_2 + \alpha_f > \pi$  kann die Ecke  $f$  von  $V_{i_0}$  aber nur mit Ecken  $1$  anderer Zerlegungsvierecke übereinstimmen. Es gibt also ein Zerlegungsviereck  $V_{i_1}$ , dessen Ecke  $1$  mit der Ecke  $f$  von  $V_{i_0}$  übereinstimmt und dessen Seite  $s(1, 2)$  oder  $s(1, f)$  an der Seite  $s(f, e)$  von  $V_{i_0}$  liegt. Da  $|s(1, 2)| > |s(f, e)|$  und  $|s(1, f)| > |s(f, e)|$  ist, liegt die Ecke  $e$  von  $V_{i_0}$  im relativen Inneren dieser Seite von  $V_{i_1}$ . Es muß also Ecken von Zerlegungsvierecken geben, die mit der Ecke  $e$  von  $V_{i_0}$  übereinstimmen, so daß sich die Innenwinkel zu einem Winkel der Größe  $\pi$  ergänzen. Wegen  $\alpha_2 + \alpha_e > \pi$  können das nur Ecken mit der Nummer  $1$  sein. Folglich gibt es ein Zerlegungsviereck, dessen Ecke  $1$  mit der Ecke  $e$  von  $V_{i_0}$  übereinstimmt und dessen Seite  $s(1, 2)$  oder  $s(1, f)$  an der Seite  $s(e, 2)$  von  $V_{i_0}$  liegt. Dies ist aber wegen  $|s(e, 2)| < |s(1, 2)|$  und  $|s(e, 2)| < |s(1, f)|$  unmöglich.

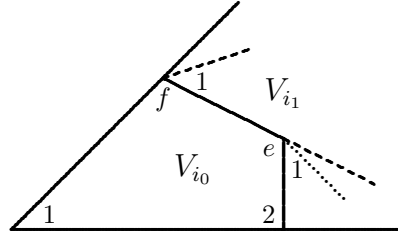


Abbildung 2.15: Replizierende Zerlegung eines Vierecks in einer Umgebung der Ecke  $1$  im Fall  $d = 2$

Sei nun  $e = 2$  und  $d, f \in \{3, 4\}$ . Aus  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  folgt dann  $\alpha_2 + \alpha_d > \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_f > \pi$ . Liegt die Ecke  $d$  von  $V_{i_0}$  im relativen Inneren einer Seite von  $V$ , folgt demnach mit der gleichen Argumentation wie oben, daß es ein Zerlegungsviereck gibt, dessen Ecke  $1$  mit der Ecke  $d$  von  $V_{i_0}$  übereinstimmt und dessen Seite  $s(1, d)$  oder  $s(1, f)$  an der Seite  $s(d, 2)$  von  $V_{i_0}$  liegt. Liegt auch die Ecke  $f$  von  $V_{i_0}$  im relativen Inneren einer Seite von  $V$ , gibt es ein Zerlegungsviereck, dessen Ecke  $1$  mit der Ecke  $f$  von  $V_{i_0}$  übereinstimmt und dessen Seite  $s(1, d)$  oder  $s(1, f)$  an der Seite  $s(f, 2)$  von  $V_{i_0}$  liegt. Dies ist aber wegen  $|s(1, d)| > |s(d, 2)|$ ,  $|s(1, f)| > |s(d, 2)|$  und  $|s(1, d)| > |s(f, 2)|$ ,  $|s(1, f)| > |s(f, 2)|$  nicht gleichzeitig möglich.

Mit den gleichen Argumenten folgt, daß nicht eine der Ecken  $d$  bzw.  $f$  von  $V_{i_0}$  in

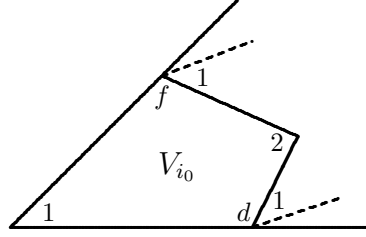


Abbildung 2.16: Replizierende Zerlegung eines Vierecks in einer Umgebung der Ecke 1 im Fall  $e = 2$

einer Ecke von  $V$  und die andere im relativen Inneren einer Seite von  $V$  liegen kann. Es können aber auch nicht sowohl die Ecke  $d$  von  $V_{i_0}$  als auch die Ecke  $f$  von  $V_{i_0}$  in Ecken von  $V$  liegen, da sonst einander entsprechende Seiten von  $V$  und  $V_{i_0}$  die gleiche Länge hätten. Somit ergibt sich auch für  $e = 2$  ein Widerspruch.  $\square$

Im Kapitel 3 wird bewiesen, daß kein nichtkonvexes Viereck selbstähnlich ist (Folgerung 3.2). Somit ist jedes replizierende Viereck ein Trapez oder ein Sehnenviereck.

Jetzt sollen die  $k$ -replizierenden und die  $k$ -selbstähnlichen Parallelogramme klassifiziert werden.

**Satz 2.10.** *Ein Parallelogramm ist genau dann  $k$ -replizierend, wenn  $k$  eine Quatzahl ist oder wenn es natürliche Zahlen  $m, n$  gibt mit  $k = mn$  und sich die Seitenlängen des Parallelogramms wie  $\sqrt{m} : \sqrt{n}$  verhalten.*

**Beweis.** Sei zunächst  $k = l^2$  mit  $l \in \mathbb{N}$ . Dann läßt sich jedes Parallelogramm  $P$  durch Strecken, die parallel zu den Seiten von  $P$  sind, in untereinander kongruente, zum Ausgangsparallelogramm  $P$  ähnliche Parallelogramme  $P_1, \dots, P_k$  zerlegen. Die Streckenendpunkte erhält man, indem man die Seiten von  $P$  jeweils in  $l$  gleich lange Strecken zerlegt.

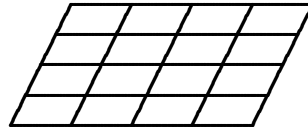


Abbildung 2.17: 16-replizierende Zerlegung eines Parallelogramms

Sei jetzt  $k \neq l^2$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ . Zunächst wird gezeigt, daß die im Satz für diesen Fall angegebene Bedingung hinreichend ist. Sei also  $P$  ein Parallelogramm mit den Seitenlängen  $\hat{x}$  und  $\hat{y}$  mit  $\hat{x} : \hat{y} = \sqrt{m} : \sqrt{n}$  für  $m, n \in \mathbb{N}$ . Außerdem gelte  $k = mn$ . Das Parallelogramm  $P$  kann durch Strecken, die parallel zu den Seiten von  $P$  sind, so in untereinander kongruente Parallelogramme  $P_1, \dots, P_k$  zerlegt werden, daß die Parallelogramme  $P_1, \dots, P_k$  die Seitenlängen

$$x := \frac{\hat{y}}{n}, \quad y := \frac{\hat{x}}{m}$$

haben. Es gilt

$$\frac{\hat{x}}{x} = \frac{\hat{y}}{y} = \sqrt{k}.$$

Weil zusätzlich die Winkel von  $P$  und  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , kongruent sind, ist  $P$  ähnlich zu  $P_1, \dots, P_k$ . Demzufolge ist das Parallelogramm  $P$   $k$ -replizierend.

Als nächstes wird bewiesen, daß die Bedingung auch notwendig ist. Gegeben sei ein Parallelogramm  $P$  und eine Zerlegung  $P = P_1 + \dots + P_k$  von  $P$  mit  $P_i \cong P_1 \sim P$ ,  $i = 2, \dots, k$ . Die Seitenlängen der untereinander kongruenten Parallelogramme  $P_i$  seien  $x$  und  $y$ . Der Flächeninhalt von  $P$  ist gleich dem  $k$ -fachen des Flächeninhalts von  $P_1$ . Da außerdem die Parallelogramme  $P$  und  $P_1$  ähnlich sind, hat  $P$  die Seitenlängen  $\sqrt{k}x$ ,  $\sqrt{k}y$ .

Bei der Zerlegung  $P = P_1 + \dots + P_k$  wird jede Seite von  $P$  in Seiten von  $P_1, \dots, P_k$ , d. h. in Strecken der Länge  $x$  und  $y$ , zerlegt. Es muß also gelten

$$ax + by = \sqrt{k}x, \quad a, b \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1)$$

$$cx + dy = \sqrt{k}y, \quad c, d \in \mathbb{N}_0. \quad (2.2)$$

Aus der Gleichung (2.2) folgt für die Länge  $y$

$$y = \frac{c}{\sqrt{k} - d} x.$$

Setzt man dies in die Gleichung (2.1) ein, erhält man

$$ax + \frac{bc}{\sqrt{k} - d} x = \sqrt{k}x.$$

Aus dieser Gleichung folgt wegen  $x > 0$

$$(a + d)\sqrt{k} = k + ad - bc. \quad (2.3)$$

Da  $k$  keine Quadratzahl ist, gilt  $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$ . Andererseits gilt aber  $a + d \in \mathbb{Z}$  und  $k + ad - bc \in \mathbb{Z}$ . Deshalb kann die Gleichung (2.3) nur für  $a + d = 0$  und  $k + ad - bc = 0$  erfüllt sein. Daraus folgt, daß  $a = d = 0$  und  $k = bc$  gelten muß. Setzt man  $a = 0$  und  $k = bc$  in die Gleichung (2.1) ein, erhält man außerdem  $x : y = \sqrt{b} : \sqrt{c}$ .  $\square$

Es gibt also für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  sogar ein  $k$ -replizierendes Parallelogramm. Die Abbildung 2.18 zeigt die bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmten 12-replizierenden Rechtecke.

**Satz 2.11.** *Jedes Parallelogramm ist  $k$ -selbstähnlich für  $k = 4$ ,  $k \geq 6$ .*

**Beweis.** Nach Satz 2.10 ist jedes Parallelogramm 4-selbstähnlich. Somit ist jedes  $k$ -selbstähnliche Parallelogramm auch  $(k+3)$ -selbstähnlich. Denn bei einem  $k$ -selbstähnlichen Parallelogramm  $P = P_1 + \dots + P_k$  mit  $P_i \sim P$ ,  $i = 1, \dots, k$ , läßt sich z. B.  $P_1$  in vier zu  $P$  ähnliche Parallelogramme zerlegen.



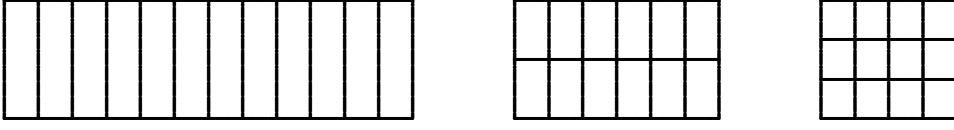


Abbildung 2.18: 12-replizierende Rechtecke mit den Seitenverhältnissen  $1 : \sqrt{12}$ ,  $\sqrt{2} : \sqrt{6}$  und  $\sqrt{3} : \sqrt{4}$

Es genügt jetzt zu zeigen, daß jedes Parallelogramm auch 6-selbstähnlich und 8-selbstähnlich ist. Ein Parallelogramm  $P$  mit den Seitenlängen  $x$  und  $y$  kann in ein Parallelogramm mit den Seitenlängen  $\frac{2}{3}x$ ,  $\frac{2}{3}y$  und in fünf Parallelogramme mit den Seitenlängen  $\frac{1}{3}x$ ,  $\frac{1}{3}y$  zerlegt werden, deren Winkelgrößen mit den Winkelgrößen von  $P$  übereinstimmen (siehe Abbildung 2.19). Somit ist  $P$  6-selbstähnlich. Außerdem ist  $P$  8-selbstähnlich, denn es gibt eine Zerlegung von  $P$  in ein Parallelogramm mit den Seitenlängen  $\frac{3}{4}x$ ,  $\frac{3}{4}y$  und in sieben Parallelogramme mit den Seitenlängen  $\frac{1}{4}x$ ,  $\frac{1}{4}y$ , deren Winkel kongruent zu den Winkeln von  $P$  sind (siehe Abbildung 2.19).

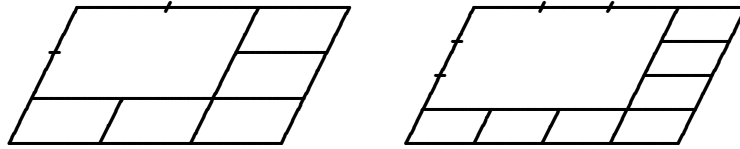


Abbildung 2.19: 6-selbstähnliche und 8-selbstähnliche Zerlegung eines Parallelogramms

□

Es gibt Parallelogramme, die weder 2-, 3- noch 5-selbstähnlich sind. Parallelogramme mit dieser Eigenschaft sind offensichtlich die Quadrate.

Will man die 2-, 3- oder 5-selbstähnlichen Parallelogramme klassifizieren, kann man z. B. alle möglichen Zerlegungen eines Parallelogramms in 2, 3 bzw. 5 Parallelogramme untersuchen. In zwei Parallelogramme läßt sich ein Parallelogramm nur auf eine Art zerlegen: durch einen Schnitt, der parallel zu einer Seite des Parallelogramms ist. Damit diese Zerlegung selbstähnlich ist, müssen die beiden Zerlegungsparallelogramme kongruent sein. Nach Satz 2.10 ist ein Parallelogramm also genau dann 2-selbstähnlich, wenn sich seine Seitenlängen wie  $1 : \sqrt{2}$  verhalten.

Sei jetzt  $P = P_1 + P_2 + P_3$  eine 3-selbstähnliche Zerlegung eines Parallelogramms  $P$ . Die Seitenlängen von  $P$  seien  $x$  und  $y$  mit  $x < y$  und die Seitenlängen des zu  $P$  ähnlichen Parallelogramms  $P_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , seien  $x_i$  und  $y_i$  mit  $x_i < y_i$ . Es gilt  $x_i < x$  und  $y_i < y$  für  $i = 1, 2, 3$ .

Bei einer Zerlegung eines Parallelogramms in drei Parallelogramme, muß eine Seite des Ausgangsparallelogramms mit einer Seite eines Zerlegungsparallelogramms übereinstimmen. Somit muß bei der 3-selbstähnlichen Zerlegung von  $P$  eine Seite der Länge  $x$  von  $P$  o.B.d.A. mit einer Seite der Länge  $y_1$  von  $P_1$  übereinstimmen. Für die andere Seite der Länge  $x$  von  $P$  können folgende Fälle unterschieden werden:

1. Fall: Sie stimmt mit einer Seite der Länge  $y_2$  von  $P_2$  oder mit einer Seite der Länge  $y_3$  von  $P_3$  überein.

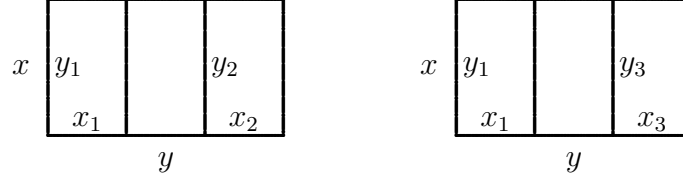


Abbildung 2.20: Zerlegungen eines Rechtecks im 1. Fall

2. Fall: Sie ist in eine Seite der Länge  $x_2$  von  $P_2$  und in eine Seite der Länge  $x_3$  von  $P_3$  zerlegt.

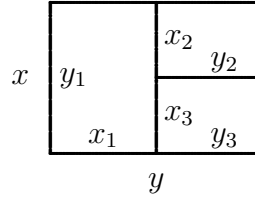


Abbildung 2.21: Zerlegung eines Rechtecks im 2. Fall

3. Fall: Sie ist in eine Seite der Länge  $y_2$  von  $P_2$  und in eine Seite der Länge  $y_3$  von  $P_3$  zerlegt.

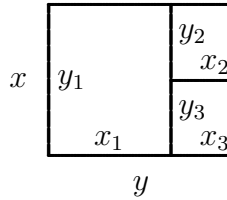


Abbildung 2.22: Zerlegung eines Rechtecks im 3. Fall

4. Fall: Sie ist in eine Seite der Länge  $x_2$  von  $P_2$  und in eine Seite der Länge  $y_3$  von  $P_3$  oder in eine Seite der Länge  $y_2$  von  $P_2$  und in eine Seite der Länge  $x_3$  von  $P_3$  zerlegt.

Im 1. Fall muß wegen  $x_2, x_3 < x$  gelten  $x = y_1 = y_2 = y_3$ . Daraus folgt  $P_1 \cong P_2 \cong P_3$ . Nach Satz 2.10 gilt demnach  $x : y = 1 : \sqrt{3}$ .

Im 2. Fall gilt  $y_2 = y_3$  und somit  $P_2 \cong P_3$ . Aus  $x = x_2 + x_3 = 2x_2$  folgt  $y = 2y_2$ . Damit ergibt sich

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{y - y_2}{x} = \frac{1}{2} \frac{y}{x}.$$

Es muß demzufolge  $x : y = 1 : \sqrt{2}$  gelten.

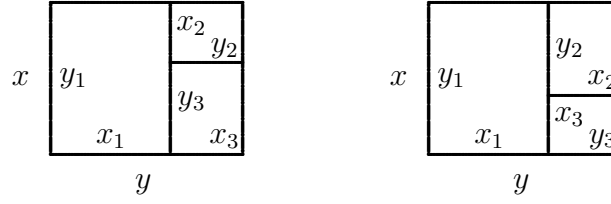


Abbildung 2.23: Zerlegungen eines Rechtecks im 4. Fall

Im 3. Fall gilt  $x_2 = x_3$  und somit  $P_2 \cong P_3$ . Aus  $y_1 = x = y_2 + y_3 = 2y_2$  folgt  $x_1 = 2x_2$ . Damit erhält man  $y = x_1 + x_2 = \frac{3}{2}x_1$ . Daraus folgt

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{2}{3} \frac{y}{x}.$$

Es muß demzufolge  $x : y = \sqrt{2} : \sqrt{3}$  gelten.

Im 4. Fall gelte o.B.d.A.  $x = x_2 + y_3$ . Dann gilt  $y_2 = x_3$  und somit

$$x = x_2 + y_3 = \frac{x}{y} y_2 + \frac{y}{x} x_3 = \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) x_3 = \frac{x^2 + y^2}{xy} x_3.$$

Es ergibt sich

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{y - x_3}{x} = \frac{y - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}{x}.$$

Daraus folgt

$$x^4 = y^4 - x^2 y^2.$$

Setzt man  $x = 1$ , erhält man  $0 = y^4 - y^2 - 1$ . Für  $y^2$  muß also  $y^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$  gelten. Folglich ergibt sich für das Verhältnis der Seitenlängen von  $P$   $x : y = 1 : \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$ .

Die in den Fällen 1 bis 4 ermittelten Bedingungen sind nicht nur notwendig sondern auch hinreichend. Faßt man die Ergebnisse zusammen, erhält man:

**Satz 2.12.** a) Ein Parallelogramm ist genau dann 2-selbstähnlich, wenn sich die Seitenlängen wie  $1 : \sqrt{2}$  verhalten.

b) Ein Parallelogramm ist genau dann 3-selbstähnlich, wenn sich die Seitenlängen wie  $1 : \sqrt{3}$ ,  $1 : \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2} : \sqrt{3}$  oder wie  $1 : \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$  verhalten.

Bei der Klassifikation der 5-selbstähnlichen Parallelogramme kann man analog vorgehen. Die Fallunterscheidung wird aber sehr umfangreich.

## 2.3 Selbstähnliche und replizierende konvexe Fünfecke

Eine Vermutung von E. Hertel [15] besagt, daß kein konvexes Fünfeck selbstähnlich ist. Hier wird gezeigt, daß kein konvexes Fünfeck replizierend ist (Satz 2.23). Au-

ßerdem wird gezeigt, ein konvexes Fünfeck kann höchstens dann selbstähnlich sein, wenn die Innenwinkel die Größen  $\frac{1}{3}\pi$ ,  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $\frac{2}{3}\pi$ ,  $\frac{2}{3}\pi$  und  $\frac{5}{6}\pi$  haben (Satz 2.22). Bevor diese beiden Sätze bewiesen werden, werden mehrere Bedingungen bewiesen, die die Innenwinkel selbstähnlicher konvexer Fünfecke erfüllen müssen. Dabei wird ausgenutzt, daß bei einer selbstähnlichen Zerlegung eines Fünfecks einander entsprechende Winkel des Ausgangsfünfecks und der Zerlegungsfünfecke die gleiche Größe und einander entsprechende Seiten des Ausgangsfünfecks und der Zerlegungsfünfecke nicht die gleiche Länge haben.

Die Innenwinkelgrößen eines Fünfecks werden im Folgenden mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  bezeichnet. Die Ecken der Fünfecke werden wie auf Seite 9 erläutert numeriert. Zur Beschreibung von Eigenschaften einer Zerlegung eines Fünfecks werden die auf Seite 9 eingeführten Sprechweisen verwendet.

Es sei  $F$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes Fünfeck. Da  $k \geq 2$  ist, gibt es bei jeder  $k$ -selbstähnlichen Zerlegung von  $F$  einen Randpunkt von  $F$ , in dem zwei Ecken von Zerlegungsfünfecken liegen. Die Summe der zugehörigen Innenwinkelgrößen kann nicht größer als  $\pi$  sein. Weil  $\alpha_1$  die kleinste Innenwinkelgröße von  $F$  ist, folgt daraus  $\alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$ . Im Fall  $\alpha_2 > \frac{\pi}{2}$  gilt also  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Somit kann analog zum Lemma 2.7 bewiesen werden

**Lemma 2.13.** *Ist ein konvexes Fünfeck selbstähnlich, dann gilt  $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ .*

Ebenfalls analog zum Lemma 2.7 läßt sich zeigen

**Lemma 2.14.** *Bei jeder selbstähnlichen Zerlegung eines konvexen Fünfecks  $F$ , für das  $\alpha_1 < \alpha_2$  gilt, müssen in einem Randpunkt von  $F$  zwei Ecken, deren Nummer jeweils ungleich 1 ist, von Zerlegungsfünfecken liegen.*

Würde Lemma 2.14 nicht gelten, könnte bei einer selbstähnlichen Zerlegung eines konvexen Fünfecks  $F$  mit der Eigenschaft  $\alpha_1 < \alpha_2$  in jedem Randpunkt von  $F$  höchstens eine Ecke mit einer Nummer ungleich 1 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Wegen  $\alpha_1 < \alpha_2$  muß außerdem in der Ecke 1 von  $F$  eine Ecke mit der Nummer 1 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Damit würde man wie beim Beweis von Lemma 2.7 einen Widerspruch erhalten.

**Lemma 2.15.** *Ist ein konvexes Fünfeck selbstähnlich, dann gilt  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$ .*

**Beweis.** Wie der Beweis von Lemma 2.8 basiert auch dieser Beweis auf einer Idee von U. Betke [2]. Sei  $F$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes Fünfeck, d. h.  $F = F_1 + \dots + F_k$  mit  $F_i \sim F$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Angenommen, es gilt  $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$ . Zusammen mit  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$  (Lemma 2.13) folgt dann

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 < \alpha_4 \leq \alpha_5. \quad (2.4)$$

Zum Beweis des Satzes wird der Rand von  $F$  betrachtet. Aus  $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$  und  $\alpha_4 \leq \alpha_5$  folgt, keine Ecke mit der Nummer 4 oder mit der Nummer 5 eines Zerlegungsfünfecks kann im relativen Inneren einer Seite von  $F$  liegen (Lemma 2.2).

Wegen (2.4) können Ecken mit der Nummer 4 oder 5 auch nicht in den Ecken 1 und 2 von  $F$  liegen. Sie können also nur in der Ecke 3, 4 und 5 von  $F$  liegen.

Es werden nun folgende Fälle unterschieden

1. Fall:  $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3$ ,
2. Fall:  $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3$ ,
3. Fall:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ .

Zunächst wird der 1. Fall betrachtet. Die Reihenfolge der Ecken von  $F$  sei 1,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  mit  $d, e, f, g \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

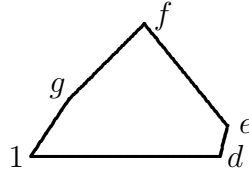


Abbildung 2.24: Numerierung der Ecken im 1. Fall

Wegen  $\alpha_1 < \alpha_2$  muß in der Ecke 1 von  $F$  die Ecke 1 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Nach Lemma 2.2 gilt demnach für die zu den Nachbarecken  $d$  und  $g$  der Ecke 1 gehörenden Innenwinkel:  $\alpha_1 + \alpha_d \leq \pi$  und  $\alpha_1 + \alpha_g \leq \pi$ . Mit  $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$  folgt daraus  $d, g \in \{2, 3\}$  und  $e, f \in \{4, 5\}$ . Außerdem ergibt sich  $\alpha_3 < \alpha_4$ .

Die Eckenreihenfolge sei o.B.d.A. im Fall  $\alpha_2 \neq \alpha_3$  gleich 1, 2,  $e$ ,  $f$ , 3 mit  $e, f \in \{4, 5\}$  und im Fall  $\alpha_2 = \alpha_3$  gleich 1, 2, 4, 5, 3.



Abbildung 2.25: Fünfecke mit Eckenreihenfolge 1, 2,  $e$ ,  $f$ , 3 bzw. 1, 2, 4, 5, 3

In beiden Fällen kann in der Ecke 2 von  $F$  keine Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Denn sonst müßte nach Lemma 2.2 gelten  $\alpha_1 + \alpha_e \leq \pi$  bzw.  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$ . Da  $e \in \{4, 5\}$  ist, steht beides im Widerspruch zur Annahme. Im Fall  $\alpha_2 \neq \alpha_3$  kann in der Ecke 2 von  $F$  außerdem keine Ecke 3 liegen. Das gleiche gilt für  $\alpha_2 = \alpha_3$ . Denn würde in diesem Fall die Ecke 3 des Zerlegungsfünfecks  $F_{i_0}$ ,  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ , in der Ecke 2 von  $F$  liegen, müßte nach den obigen Überlegungen die Ecke mit der Nummer 5 von  $F_{i_0}$  in der Ecke 4 von  $F$  liegen. Mit  $\alpha_4 \leq \alpha_5$  folgt dann  $\alpha_4 = \alpha_5$ . Somit müßte die Ecke mit der Nummer 4 von  $F_{i_0}$  im relativen Inneren einer Seite von  $F$  liegen oder einander entsprechende Seiten von  $F$  und  $F_{i_0}$  müßten übereinstimmen. Beides ist nicht möglich. Wegen (2.4) kann in der Ecke 2 von  $F$  auch keine Ecke 4 oder 5 liegen. Deshalb liegen in der Ecke 2 von  $F$  ausschließlich Ecken mit der Nummer 1 von Fünfecken  $F_i$ . Daraus folgt

$$\alpha_2 = n_2 \alpha_1 \text{ mit } n_2 \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

In der Ecke 3 von  $F$  können nur Ecken mit der Nummer 1 oder 2 liegen. Würde die Ecke 3 von  $F$  mit der Ecke 3 eines Zerlegungsfünfecks übereinstimmen, dann müßte nach Lemma 2.2 gelten  $\alpha_1 + \alpha_f \leq \pi$  bzw.  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$ . Da  $f \in \{4, 5\}$  ist, steht beides im Widerspruch zur Annahme. Wegen  $\alpha_3 < \alpha_4 \leq \alpha_5$  liegt in der Ecke 3 von  $F$  auch keine Ecke 4 und keine Ecke 5. Somit folgt aus (2.5)

$$\alpha_3 = n_3 \alpha_1 \text{ mit } n_3 \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

In der Ecke 4 von  $F$  können schließlich nur Ecken mit der Nummer 1, 2 oder 3 liegen. Zum Beweis berücksichtige man, daß die Ecken 4 und 5 zu einer Seite von  $F$  gehören und daß gilt  $\alpha_2 \leq \alpha_3 < \alpha_4 \leq \alpha_5$  und  $\alpha_1 + \alpha_5 \geq \alpha_1 + \alpha_4 > \pi$ . Zusammen mit (2.5) und (2.6) folgt also

$$\alpha_4 = n_4 \alpha_1 \text{ mit } n_4 \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Im relativen Inneren der längsten Seite von  $F$  liegen Ecken von Zerlegungsfünfecken (Lemma 2.2). Deshalb muß es Innenwinkel von Zerlegungsfünfecken geben, deren Größen sich zu  $\pi$  summieren. Da außerdem  $\alpha_1 + \alpha_5 \geq \alpha_1 + \alpha_4 > \pi$  ist, existieren Zahlen  $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{N}_0$  mit  $l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 = \pi$ . Zusammen mit (2.5) und (2.6) ergibt sich

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{n_1} \text{ mit } n_1 := l_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 \in \mathbb{N}.$$

Setzt man dies in die Gleichung (2.7) ein, erhält man  $\alpha_4 = \frac{n_4}{n_1} \pi$ . Mit  $\alpha_4 < \pi$  und  $n_1, n_4 \in \mathbb{N}$  folgt daraus  $n_4 + 1 \leq n_1$ . Damit ergibt sich  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$ . Dies steht im Widerspruch zur Annahme.

Jetzt soll der 2. Fall betrachtet werden. Es gilt also  $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3$ . Würde in der Ecke 1 von  $F$  eine Ecke 1 liegen, erhielte man wie im 1. Fall einen Widerspruch. Das gleiche gilt, falls in der Ecke 2 von  $F$  eine Ecke 2 liegen würde, da auch so numeriert werden kann, daß die Nummern der Ecken 1 und 2 vertauscht sind. Die Ecke 1 von  $F$  muß also mit der Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks  $F_{i_0}$ ,  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ , und die Ecke 2 von  $F$  mit der Ecke 1 eines Zerlegungsfünfecks  $F_{i_1}$ ,  $i_1 \in \{1, \dots, k\}$ , übereinstimmen.

Eine Seite eines Fünfecks, deren Endpunkte die Nummern  $e_1$  und  $e_2$  haben, wird im Folgenden mit  $s(e_1, e_2)$  bezeichnet. In Abhängigkeit von der Reihenfolge der Ecken von  $F$  werden jetzt weitere Fälle unterschieden. Die Numerierung kann so erfolgen, daß einer der Fälle 2.1 bis 2.4 eintritt.

*Fall 2.1:* Die Ecken von  $F$  haben die Reihenfolge 1, 2,  $d$ ,  $e$ , 3 mit  $d, e \in \{4, 5\}$ .

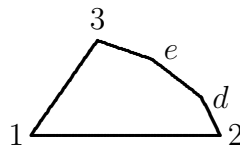


Abbildung 2.26: Numerierung der Ecken im Fall 2.1

Wenn die Ecke 2 von  $F_{i_0}$  in der Ecke 1 von  $F$  liegt, muß nach den obigen Überlegungen die Ecke  $d \in \{4, 5\}$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke 3 von  $F$  liegen. Daraus folgt  $\alpha_d \leq \alpha_3 \leq \alpha_d$ , also  $\alpha_3 = \alpha_d$ . Somit muß die Ecke  $e \in \{4, 5\}$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke  $e$  von  $F$  liegen. Wegen  $\alpha_3 = \alpha_d$  und  $d \in \{4, 5\}$  kann die Ecke 3 von  $F_{i_0}$  nicht im relativen Inneren einer Seite von  $F$  liegen. Sie muß folglich in der Ecke  $d$  von  $F$  liegen. Weil  $\alpha_3 = \alpha_d$  ist, muß nun die Ecke 1 von  $F_{i_0}$  entweder im relativen Inneren der Seite  $s(2, d)$  von  $F$  oder in der Ecke 2 von  $F$  liegen. Beides ist nicht möglich, da  $F$  und  $F_{i_0}$  ähnlich aber nicht kongruent sind. Der Fall 2.1 kann also nicht eintreten.

*Fall 2.2:* Die Ecken von  $F$  haben die Reihenfolge 1, 2,  $d$ , 3,  $e$  mit  $d, e \in \{4, 5\}$ .

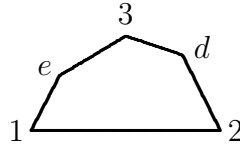


Abbildung 2.27: Numerierung der Ecken im Fall 2.2

Zunächst wird das Fünfeck  $F_{i_0}$  betrachtet. Nach den obigen Überlegungen muß die Ecke  $d \in \{4, 5\}$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke  $e$  von  $F$  liegen. Somit stimmt die Seite  $s(2, d)$  von  $F_{i_0}$  mit der Seite  $s(1, e)$  von  $F$  überein. Da  $F$  und  $F_{i_0}$  ähnlich aber nicht kongruent sind, ist deshalb die Seite  $s(2, d)$  von  $F$  länger als die Seite  $s(1, e)$  von  $F$ . Wenn man das Fünfeck  $F_{i_1}$  betrachtet, ergibt sich analog, daß die Seite  $s(1, e)$  von  $F$  länger als die Seite  $s(2, f)$  von  $F$  ist. Daher kann auch der Fall 2.2 nicht eintreten.

*Fall 2.3:* Die Ecken von  $F$  haben die Reihenfolge 1, 3, 2,  $d$ ,  $e$  mit  $d, e \in \{4, 5\}$ .

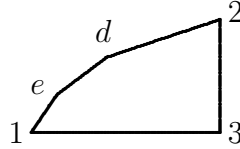


Abbildung 2.28: Numerierung der Ecken im Fall 2.3

Die Ecke  $d$  von  $F_{i_0}$  kann nicht in der Ecke 3 von  $F$  liegen. Denn keine Ecke mit der Nummer  $e \in \{4, 5\}$  kann im relativen Inneren einer Seite von  $F$  oder in der Ecke 2 von  $F$  liegen. Deshalb liegt die Ecke  $d$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke  $e$  von  $F$ . Da im Fall  $\alpha_d < \alpha_e$  der zur Ecke  $d$  von  $F_{i_0}$  gehörende Innenwinkel zu einem Winkel der Größe  $\alpha_e$  ergänzt werden müßte, andererseits aber  $\alpha_e < \pi < \alpha_1 + \alpha_d$  gilt, ist  $\alpha_d = \alpha_e$ . Die Ecke  $e$  von  $F_{i_0}$  muß somit auf der Seite  $s(d, e)$  von  $F$  liegen. Dies ist aber nicht möglich, denn keine Ecke mit der Nummer  $e$  liegt im relativen Inneren einer Seite von  $F$  und einander entsprechende Seiten von  $F$  und  $F_{i_0}$  stimmen nicht überein. Der Fall 2.3 kann also nicht eintreten.

*Fall 2.4:* Die Ecken von  $F$  haben die Reihenfolge 1, 3,  $d$ , 2,  $e$  mit  $d, e \in \{4, 5\}$ .

Es muß entweder die Ecke  $d \in \{4, 5\}$  oder die Ecke  $e \in \{4, 5\}$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke 3 von  $F$  liegen. Würde die Ecke  $d$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke 3 von  $F$  liegen, so müßte

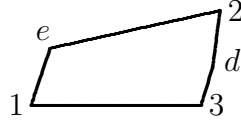


Abbildung 2.29: Numerierung der Ecken im Fall 2.4

$\alpha_d \leq \alpha_3 \leq \alpha_d$  also  $\alpha_3 = \alpha_d$  gelten. Da sich deshalb keine Ecke mit der Nummer 3 im relativen Inneren einer Seite von  $F$  befinden könnte, aber auch nicht gleichzeitig die Ecke  $d$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke 3 und die Ecke 3 von  $F_{i_0}$  in der Ecke  $d$  von  $F$  liegt, würde sich ein Widerspruch ergeben. Also muß die Ecke  $e$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke 3 von  $F$  liegen. Gleichzeitig muß dann die Ecke  $d$  von  $F_{i_0}$  in der Ecke  $e$  von  $F$  liegen. Daraus folgt  $\alpha_3 \leq \alpha_d \leq \alpha_e \leq \alpha_3$  also  $\alpha_3 = \alpha_d = \alpha_e$ . Wegen  $\alpha_d = \alpha_e$  muß die Ecke 3 von  $F_{i_0}$  im relativen Inneren der Seite  $s(2, e)$  von  $F$  oder in der Ecke 2 von  $F$  liegen. Dies ist aber wegen  $\alpha_3 = \alpha_d$  nicht möglich. Demzufolge kann auch die Ecke  $e$  von  $F_{i_0}$  nicht in der Ecke 3 von  $F$  liegen. Der Fall 2.4 kann daher ebenfalls nicht eintreten.

Auch im 3. Fall wird eine weitere Fallunterscheidung bezüglich der Reihenfolge der Ecken vorgenommen. Die Freiheit bei der Numerierung, die man wegen  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  hat, kann so ausgenutzt werden, daß der Fall 3.1 oder der Fall 3.2 eintritt.

*Fall 3.1:* Die Ecken von  $F$  haben die Reihenfolge 1, 2,  $d$ ,  $e$ , 3 mit  $d, e \in \{4, 5\}$ .

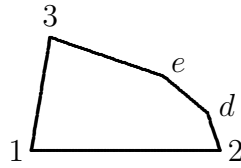


Abbildung 2.30: Numerierung der Ecken im Fall 3.1

Wie im 1. Fall ergibt sich  $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 = \pi$  mit  $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{N}_0$ . Daraus folgt  $\alpha_1 = \frac{\pi}{n_1}$  mit  $n_1 := l_1 + l_2 + l_3 \in \mathbb{N}$ . Ferner können in der Ecke 4 von  $F$  ausschließlich Ecken mit den Nummern 1, 2 oder 3 von Zerlegungsfünfecken liegen. Es gilt also  $\alpha_4 = n_4\alpha_1$  mit  $n_4 \in \mathbb{N}$ . Somit erhält man analog zum 1. Fall einen Widerspruch zu  $\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$ .

*Fall 3.2:* Die Ecken von  $F$  haben die Reihenfolge 1, 2,  $d$ , 3,  $e$  mit  $d, e \in \{4, 5\}$ .

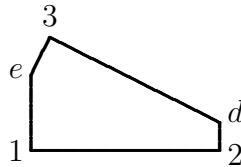


Abbildung 2.31: Numerierung der Ecken im Fall 3.2

Weder die Ecke 1 noch die Ecke 2 von  $F$  kann mit der Ecke 3 eines Zerlegungsfünfecks übereinstimmen. Außerdem kann in der Ecke 1 von  $F$  keine Ecke 1 und in der



Ecke 2 von  $F$  keine Ecke 2 liegen. In der Ecke 1 von  $F$  müßte also die Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks und in der Ecke 2 die Ecke 1 eines weiteren Zerlegungsfünfecks liegen. Dies führt aber analog zum Fall 2.2 zu einem Widerspruch.  $\square$

Bei einem konvexen Fünfeck folgt aus  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$  die Beziehung  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$ , denn es gilt  $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 3\pi$  und  $\alpha_5 < \pi$ . Aus  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  ergibt sich  $\alpha_1 < \alpha_2$  und aus  $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  ergibt sich  $\alpha_3 > \frac{\pi}{2}$ . Deshalb folgt aus Lemma 2.13 und Lemma 2.15

**Lemma 2.16.** *Ist ein konvexes Fünfeck selbstähnlich, dann gilt*

$$\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} < \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5 \quad \text{und} \quad \alpha_2 + \alpha_3 > \pi.$$

**Lemma 2.17.** *Ist ein konvexes Fünfeck selbstähnlich, dann gilt  $\alpha_1 + \alpha_5 > \pi$ .*

**Beweis.** Sei  $F$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes Fünfeck, d. h.  $F = F_1 + \dots + F_k$  mit  $F_i \sim F$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Angenommen, es gilt  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$ . Um diese Annahme zu einem Widerspruch zu führen, werden zwei Fälle betrachtet:

1. Fall:  $\alpha_3 < \alpha_4$ ,
2. Fall:  $\alpha_3 = \alpha_4$ .

Im 1. Fall erhält man einen Widerspruch, wenn man zum einen die Ecken der Zerlegungsfünfecke  $F_i$ , die die Nummer 1 oder die Nummer 2 haben, und zum anderen die Ecken der Zerlegungsfünfecke  $F_i$ , die die Nummer 4 oder die Nummer 5 haben, zählt. Diese beiden Zahlen stimmen hier nicht überein.

Um dies zu zeigen, wird zunächst untersucht, welche Summen der Form

$$\alpha_4 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n, \quad \alpha_5 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n$$

mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$  den Wert  $\pi$  bzw.  $2\pi$  annehmen können. Denn es gilt: Liegt eine Ecke eines Zerlegungsfünfecks nicht in einer der Ecken von  $F$ , dann muß der zugehörige Innenwinkel durch Innenwinkel anderer Zerlegungsfünfecke zu einem Winkel der Größe  $\pi$  oder  $2\pi$  ergänzt werden.

Da  $F$  selbstähnlich ist, gilt nach Lemma 2.16 und der Bedingung für den 1. Fall

$$\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} < \alpha_3 < \alpha_4 \leq \alpha_5 < \pi, \tag{2.8}$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 > \pi. \tag{2.9}$$

Aus (2.8) und (2.9) folgt  $\alpha_4 + \gamma > \pi$  und  $\alpha_5 + \gamma > \pi$  für  $\gamma \in \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ . Deshalb können nur folgende Summen der angegebenen Form den Wert  $\pi$  haben

$$l\alpha_1 + \alpha_4 \quad \text{mit } l \in \mathbb{N},$$

$$l\alpha_1 + \alpha_5 \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}.$$

Als nächstes wird untersucht, welche der Summen den Wert  $2\pi$  annehmen können. Wegen (2.8) und (2.9) sind das ausschließlich die Summen

$$\begin{aligned} l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta, \quad & \beta \in \{\alpha_4, \alpha_5\}, l, m \in \mathbb{N}_0, \\ l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta + \gamma, \quad & \beta \in \{\alpha_4, \alpha_5\}, \gamma \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, l \in \mathbb{N}_0, m \in \{0, 1\}, \\ l\alpha_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2, \quad & \beta \in \{\alpha_4, \alpha_5\}, \gamma_1, \gamma_2 \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, l \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Aus (2.8) folgt  $2\alpha_1 + \beta < \alpha_1 + \alpha_2 + \beta < 2\alpha_2 + \beta < 2\pi$  für  $\beta \in \{\alpha_4, \alpha_5\}$ . Deshalb können nur folgende Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta$  mit  $\beta \in \{\alpha_4, \alpha_5\}, l, m \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $2\pi$  ergeben

$$\begin{aligned} l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_4 \quad & \text{mit } l, m \in \mathbb{N}_0, l + m \geq 3, \\ l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_5 \quad & \text{mit } l, m \in \mathbb{N}_0, l + m \geq 3. \end{aligned}$$

Wegen  $\alpha_3 < \alpha_4 \leq \alpha_5$  und  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  können genau folgende Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + \beta + \gamma$  mit  $\beta \in \{\alpha_4, \alpha_5\}, \gamma \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  und  $l \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $2\pi$  haben

$$\begin{aligned} l\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \quad & \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 3, \\ l\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 \quad & \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 3, \\ l\alpha_1 + 2\alpha_4 \quad & \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2, \\ l\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 \quad & \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2, \\ l\alpha_1 + 2\alpha_5 \quad & \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2. \end{aligned}$$

Aus  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  und  $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 3\pi$  folgt  $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \geq 2\pi$ . Zusammen mit (2.8) erhält man  $\alpha_2 + \alpha_4 + \gamma > 2\pi$ ,  $\alpha_2 + \alpha_5 + \gamma > 2\pi$  für  $\gamma \in \{\alpha_4, \alpha_5\}$  und  $\alpha_4 + \gamma_1 + \gamma_2 > 2\pi$ ,  $\alpha_5 + \gamma_1 + \gamma_2 > 2\pi$  für  $\gamma_1, \gamma_2 \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ . Deshalb sind die Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2$  mit  $\beta \in \{\alpha_4, \alpha_5\}, \gamma_1, \gamma_2 \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, l \in \mathbb{N}_0$  ungleich  $2\pi$ . Außerdem können nur folgende Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma$  mit  $\beta \in \{\alpha_4, \alpha_5\}, \gamma \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, l \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $2\pi$  haben

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5. \end{aligned}$$

Bei jeder Summe der untersuchten Form, die den Wert  $\pi$  oder  $2\pi$  annehmen kann, gibt es pro Summand  $\alpha_4$  und pro Summand  $\alpha_5$  mindestens einen Summand  $\alpha_1$  oder  $\alpha_2$ . Es wird also bei der Zerlegung von  $F$  in  $F_1, \dots, F_k$  für jede Ecke 4 bzw. 5 der Fünfecke  $F_i$ , die nicht in einer Ecke von  $F$  liegt, mindestens eine Ecke 1 oder 2 eines Fünfecks  $F_i$  benötigt.

Liegt eine Ecke 4 oder 5 eines Fünfecks  $F_i$  in der Ecke  $e$  von  $F$ , so ist wegen (2.8)  $e = 4$  oder  $e = 5$ . Aus (2.8) folgt auch, daß in der Ecke 1 von  $F$  eine Ecke 1 und in der Ecke 2 von  $F$  eine Ecke 1 oder eine Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks liegen muß. Nach Lemma 2.14 müssen in einem Randpunkt von  $F$  zwei Ecken  $d$  und  $e$  mit  $d \neq 1$  und  $e \neq 1$  liegen. Da die Summe der zugehörigen Innenwinkelgrößen nicht größer als  $\pi$  sein kann, muß wegen (2.9) gelten  $d = e = 2$ . Es können also höchstens

zwei Ecken mit der Nummer 4 oder 5 von Zerlegungsünfecken in den Ecken von  $F$  liegen, es gibt aber mindestens vier Ecken mit der Nummer 1 oder 2, die nicht mit einer Ecke 4 oder 5 eines Zerlegungsünfecks übereinstimmen.

Faßt man die Ergebnisse zusammen, erhält man einen Widerspruch, denn die Gesamtzahl der Ecken 1 und 2 der Fünfecke  $F_i$  muß gleich der Gesamtzahl der Ecken 4 und 5 der Fünfecke  $F_i$  sein.

Im 2. Fall werden die Ecken 1 und 2 und die Ecken 3, 4 und 5 der Fünfecke  $F_i$  gezählt. Dazu wird zunächst untersucht, welche Summen der Form

$$\alpha_3 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_n, \quad \alpha_4 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_n, \quad \alpha_5 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$$

mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$  den Wert  $\pi$  oder  $2\pi$  annehmen können.

Da  $F$  selbstähnlich ist, gilt nach Lemma 2.16 und der Bedingung für den 2. Fall

$$\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} < \alpha_3 = \alpha_4 \leq \alpha_5 < \pi, \quad (2.10)$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 > \pi. \quad (2.11)$$

Deshalb können nur folgende Summen der angegebenen Form den Wert  $\pi$  haben

$$\begin{aligned} l\alpha_1 + \alpha_3 & \text{ mit } l \in \mathbb{N}, \\ l\alpha_1 + \alpha_4 & \text{ mit } l \in \mathbb{N}, \\ l\alpha_1 + \alpha_5 & \text{ mit } l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Gezählt werden nun die Knoten der Zerlegung von  $F$ , die im relativen Inneren einer Seite von  $F_1, \dots, F_k$  oder  $F$  liegen und die mit genau einer Ecke mit der Nummer  $e \in \{3, 4, 5\}$  und mindestens einer Ecke mit der Nummer 1 von Fünfecken  $F_i$  übereinstimmen, d. h. die Knoten, denen diese Winkelsummen entsprechen. Die Anzahl dieser Knoten sei  $k_1$ .

Wegen (2.10) und (2.11) können höchstens die Summen

$$\begin{aligned} l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta, \quad \beta & \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \quad l, m \in \mathbb{N}_0, \\ l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 & \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \quad l \in \mathbb{N}_0, m \in \{0, 1\}, \\ l\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3 & \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \quad l \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

gleich  $2\pi$  sein.

Aus (2.10) folgt  $2\alpha_1 + \beta < \alpha_1 + \alpha_2 + \beta < 2\alpha_2 + \beta < 2\pi$  für  $\beta \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ . Deshalb können nur folgende Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta$  mit  $\beta \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ ,  $l, m \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $2\pi$  ergeben

$$\begin{aligned} l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_3 & \text{ mit } l, m \in \mathbb{N}_0, \quad l + m \geq 3, \\ l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_4 & \text{ mit } l, m \in \mathbb{N}_0, \quad l + m \geq 3, \\ l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_5 & \text{ mit } l, m \in \mathbb{N}_0, \quad l + m \geq 3. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Knoten der Zerlegung von  $F$ , denen diese Winkelsummen entsprechen, sei  $k_2$ . Es werden also die Knoten gezählt, die nicht im relativen Inneren einer Seite von  $F_1, \dots, F_k$  oder  $F$  liegen und die mit einer Ecke mit der Nummer  $e \in \{3, 4, 5\}$  und sonst ausschließlich mit Ecken mit der Nummer 1 oder 2 übereinstimmen.

Wegen  $\alpha_3 = \alpha_4 \leq \alpha_5$  und  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  können genau folgende Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2$  mit  $\beta_1, \beta_2 \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  und  $l \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $2\pi$  haben

$$\begin{aligned} l\alpha_1 + 2\alpha_3 & \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2, \\ l\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 & \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2, \\ l\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 & \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2, \\ l\alpha_1 + 2\alpha_4 & \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2, \\ l\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 & \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2, \\ l\alpha_1 + 2\alpha_5 & \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}, l \geq 2. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Knoten, denen diese Winkelsummen entsprechen, sei  $k_3$ .

Aus  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  und  $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 3\pi$  folgt  $\alpha_2 + 2\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \geq 2\pi$ . Zusammen mit (2.10) erhält man  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > 2\pi$  für  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ . Deshalb können außer den bereits angegebenen Summen nur folgende Summen der betrachteten Form den Wert  $2\pi$  haben

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5, \\ \alpha_2 + 2\alpha_4, \\ \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ \alpha_2 + 2\alpha_5. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Knoten, denen diese Winkelsummen entsprechen, sei  $k_4$ .

In den Ecken von  $F$  können wegen (2.10) höchstens drei Ecken 3, 4 oder 5 von Fünfecken  $F_i$  liegen. Die Anzahl der Ecken der Fünfecke  $F_i$ , die die Nummer 3, die Nummer 4 oder die Nummer 5 haben, ist somit kleiner oder gleich  $k_1 + k_2 + 2k_3 + 2k_4 + 3$ . Es gilt also

$$3k \leq k_1 + k_2 + 2k_3 + 2k_4 + 3. \quad (2.12)$$

Als nächstes sollen die Ecken mit den Nummern 1 und 2 gezählt werden. Wegen (2.10) muß in der Ecke 1 von  $F$  die Ecke 1 eines Fünfecks  $F_i$  und in der Ecke 2 von  $F$  die Ecke 1 oder die Ecke 2 eines Fünfecks  $F_i$  liegen. Wie im 1. Fall sieht man, daß es zwei weitere Ecken mit der Nummer 2 von Fünfecken  $F_i$  geben muß, die bei der Zerlegung von  $F$  nicht mit Ecken 3, 4 oder 5 von Fünfecken  $F_i$  übereinstimmen. Die Anzahl der Ecken der Fünfecke  $F_i$ , die die Nummer 1 oder die Nummer 2 haben, ist somit größer oder gleich  $k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4 + 4$ . Deshalb gilt

$$2k \geq k_1 + 3k_2 + 2k_3 + k_4 + 4. \quad (2.13)$$

Aus (2.12) und (2.13) folgt

$$3k_1 + 9k_2 + 6k_3 + 3k_4 + 12 \leq 2k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 4k_4 + 6.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$k_1 + 7k_2 + 2k_3 + 6 \leq k_4. \quad (2.14)$$

Es können höchstens  $k$  Knoten existieren, die mit einer Ecke 2 eines Fünfecks  $F_i$  übereinstimmen. Deshalb gilt  $k_4 \leq k$ . Zusammen mit (2.12) erhält man  $3k_4 \leq k_1 + k_2 + 2k_3 + 2k_4 + 3$ . Daraus folgt  $k_4 \leq k_1 + k_2 + 2k_3 + 3$ . Mit dieser Ungleichung folgt aus der Ungleichung (2.14)

$$6k_2 + 3 \leq 0.$$

Dies steht im Widerspruch zu  $k_2 \geq 0$ . Somit kann auch der 2. Fall nicht eintreten.  $\square$

Aus Lemma 2.15 und Lemma 2.17 ergibt sich

**Lemma 2.18.** *Ist ein konvexes Fünfeck selbstähnlich, dann gilt  $\alpha_4 < \alpha_5$ .*

**Lemma 2.19.** *Ist ein konvexes Fünfeck selbstähnlich, dann gilt*

- a) *Es gibt kein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l\alpha_1 = \alpha_2$ .*
- b) *Es gibt  $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$  mit  $l_1\alpha_1 + \alpha_3 = l_2\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$ .*
- c) *Es gibt  $m_1 \in \mathbb{N}_0, m_2 \in \mathbb{N}$  mit  $m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = \pi$ .*
- d) *Die Eckenreihenfolge des Fünfecks ist 1, 2, 3, 5, 4 oder 1, 2, 4, 5, 3.*

**Beweis.** Sei  $F$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes Fünfeck, d.h.  $F = F_1 + \dots + F_k$  mit  $F_i \sim F$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Die Reihenfolge der Ecken von  $F$  sei 1,  $d, e, f, g$  mit  $d, e, f, g \in \{2, 3, 4, 5\}$  und  $d = 2$  oder  $e = 2$ .



Abbildung 2.32: Fünfeck mit Eckenreihenfolge 1, 2,  $e, f, g$  bzw. 1,  $d, 2, f, g$

Sei zunächst  $d = 2$ . Da nach Lemma 2.16  $\alpha_1 < \alpha_2$  ist, muß in der Ecke 1 von  $F$  die Ecke 1 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Daraus folgt mit Lemma 2.2 für die zu den Nachbarecken 2 und  $g$  der Ecke 1 gehörenden Innenwinkel:  $h_1\alpha_1 + \dots + h_5\alpha_5 + \alpha_2 = \pi$  und  $l_1\alpha_1 + \dots + l_5\alpha_5 + \alpha_g = \pi$  mit  $h_1, \dots, h_5, l_1, \dots, l_5 \in \mathbb{N}_0$ . Zusammen mit  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  (Lemma 2.16) und  $g \in \{3, 4, 5\}$  ergibt sich

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = \pi \quad \text{und} \quad l_1\alpha_1 + \alpha_g = \pi \quad (2.15)$$

für  $m_1 \in \mathbb{N}_0$  und  $m_2, l_1 \in \mathbb{N}$ . Aus  $l_1\alpha_1 + \alpha_g = \pi$  und  $\alpha_1 + \alpha_5 > \pi$  (Lemma 2.17) folgt  $g \in \{3, 4\}$ .

Es werden jetzt zwei Fälle unterschieden:

1. Fall: Es gibt kein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l\alpha_1 = \alpha_2$ .

2. Fall: Es gibt ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l\alpha_1 = \alpha_2$ .

Im 1. Fall muß wegen  $\alpha_2 < \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5$  (Lemma 2.16) in der Ecke 2 von  $F$  die Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Nach Lemma 2.2 gilt somit  $h_1\alpha_1 + \dots + h_5\alpha_5 + \alpha_e = \pi$  mit  $h_1, \dots, h_5 \in \mathbb{N}_0$ . Mit  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  und  $e \in \{3, 4, 5\}$  folgt daraus

$$l_2\alpha_1 + \alpha_e = \pi$$

mit  $l_2 \in \mathbb{N}$ . Wegen  $\alpha_1 + \alpha_5 > \pi$  gilt somit  $e \in \{3, 4\}$ . In diesem Fall sind also sämtliche Behauptungen des Lemmas erfüllt.

Im 2. Fall folgt aus den Gleichungen (2.15)

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad \alpha_g = n_1 \frac{\pi}{n}$$

mit  $n := m_1 + m_2l \in \mathbb{N}$  und  $n_1 := n - l_1 \in \mathbb{N}$ . Es wird jetzt der Fall  $e = 5$  und  $f \in \{3, 4\}$  betrachtet. In diesem Fall kann in der Ecke  $f$  von  $F$  keine Ecke  $f$  liegen. Denn sonst würde nach Lemma 2.2  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  gelten. Wegen  $\alpha_3 \leq \alpha_4 < \alpha_5$  (Lemma 2.18) kann in der Ecke  $f$  von  $F$  auch keine Ecke 5 liegen. In der Ecke  $f$  von  $F$  liegen also ausschließlich Ecken 1, 2 und  $g$  von Zerlegungsfünfecken. Daraus folgt  $\alpha_f = j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2 + j_3\alpha_g$  für  $j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{N}_0$ . Da die Innenwinkelsumme im Fünfeck  $3\pi$  beträgt, ergibt sich daraus zusammen mit  $\alpha_1 = \frac{\pi}{n}$ ,  $\alpha_2 = l\alpha_1$  und  $\alpha_g = n_1 \frac{\pi}{n}$

$$\alpha_5 = n_2 \frac{\pi}{n}$$

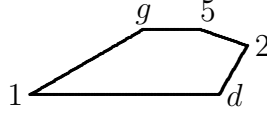
mit  $n_2 := 3n - 1 - j_1 - l - j_2l - n_1 - j_3n_1 \in \mathbb{N}$ . Aus  $\alpha_5 < \pi$  und  $n, n_2 \in \mathbb{N}$  folgt  $n_2 + 1 \leq n$ . Somit ergibt sich  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  im Widerspruch zum Lemma 2.17. Gilt  $f = 5$  und  $e \in \{3, 4\}$ , erhält man analog einen Widerspruch, wenn man statt der Ecke  $f$  die Ecke  $e$  von  $F$  betrachtet.

Es sei jetzt  $e = 2$ . Da  $\alpha_1 < \alpha_2$  ist, muß in der Ecke 1 von  $F$  die Ecke 1 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Daraus folgt mit Lemma 2.2 für die zu den Nachbarecken  $d$  und  $g$  der Ecke 1 gehörenden Innenwinkel:  $h_1\alpha_1 + \dots + h_5\alpha_5 + \alpha_d = \pi$  und  $l_1\alpha_1 + \dots + l_5\alpha_5 + \alpha_g = \pi$  mit  $h_1, \dots, h_5, l_1, \dots, l_5 \in \mathbb{N}_0$ . Zusammen mit  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  und  $d, g \in \{3, 4, 5\}$  ergibt sich

$$l_1\alpha_1 + \alpha_d = l_2\alpha_1 + \alpha_g = \pi$$

für  $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ . Wegen  $\alpha_1 + \alpha_5 > \pi$  gilt somit  $d, g = \{3, 4\}$  und  $f = 5$ .

In der Ecke 2 von  $F$  kann keine Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Denn sonst müßte nach Lemma 2.2  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  gelten. Außerdem können wegen  $\alpha_2 < \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5$  in der Ecke 2 von  $F$  auch keine Ecken 3, 4 oder 5 liegen. In der Ecke 2 von  $F$  liegen also ausschließlich Ecken 1 von Zerlegungsfünfecken. Somit gibt es eine natürliche Zahl  $l$  mit  $\alpha_2 = l\alpha_1$ .


 Abbildung 2.33: Fünfeck mit Eckenreihenfolge 1,  $d$ , 2, 5,  $g$ 

Wegen  $\alpha_1 < \alpha_2$  liegen nach Lemma 2.14 in einem Randpunkt von  $F$  Ecken  $d_1, \dots, d_h$  ( $h \geq 2$ ) von Zerlegungs-fünfecken, für die  $d_1 \neq 1$  und  $d_2 \neq 1$  gilt. Da die Summe der zugehörigen Innenwinkelgrößen nicht größer als  $\pi$  sein kann, außerdem aber  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  ist, gilt  $d_1 = d_2 = 2$  und  $d_3 = \dots = d_h = 1$ . Es existieren also Zahlen  $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ ,  $j_2 \geq 2$ , so daß  $j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2 = \pi$ ,  $j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2 = \alpha_3$ ,  $j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2 = \alpha_4$  oder  $j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2 = \alpha_5$  ist. In allen Fällen folgt zusammen mit  $\alpha_2 = l\alpha_1$  ( $l \in \mathbb{N}$ ),  $l_1\alpha_1 + \alpha_3 = l_2\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$  bzw.  $l_2\alpha_1 + \alpha_3 = l_1\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$  ( $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ ) und  $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 3\pi$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad \alpha_5 = m \frac{\pi}{n}$$

mit  $m, n \in \mathbb{N}$ . Aus  $\alpha_5 < \pi$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  folgt  $m + 1 \leq n$ . Somit gilt  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  im Widerspruch zum Lemma 2.17.

Es muß also  $d = 2$  sein, und dann kann nur der 1. Fall eintreten. In diesem Fall sind alle Behauptungen des Lemmas erfüllt.  $\square$

**Lemma 2.20.** *Ist ein konvexes Fünfeck selbstähnlich, dann gibt es eine Zahl  $l \in \mathbb{N}_0$ , so daß gilt  $l\alpha_1 + 3\alpha_3 = 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 2\pi$  oder  $l\alpha_1 + 3\alpha_4 = 2\pi$ .*

**Beweis.** Sei  $F$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes Fünfeck, d. h.  $F = F_1 + \dots + F_k$  mit  $F_i \sim F$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Angenommen, es gilt  $l\alpha_1 + 3\alpha_3 \neq 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \neq 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \neq 2\pi$  und  $l\alpha_1 + 3\alpha_4 \neq 2\pi$  für alle  $l \in \mathbb{N}_0$ . Um die Annahme zu einem Widerspruch zu führen, werden einerseits die Ecken mit den Nummern 1 und 2 und andererseits die Ecken mit den Nummern 3 und 4 der Zerlegungs-fünfecke gezählt. Dazu wird untersucht welche Summen der Form  $\beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_n$  mit  $\beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$  den Wert  $\pi$  bzw.  $2\pi$  annehmen können.

Da  $F$  selbstähnlich ist, gilt nach Lemma 2.15

$$\alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi, \tag{2.16}$$

nach Lemma 2.16 und nach Lemma 2.18

$$\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} < \alpha_3 \leq \alpha_4 < \alpha_5 < \pi \quad \text{und} \tag{2.17}$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 > \pi, \tag{2.18}$$

nach Lemma 2.17

$$\alpha_1 + \alpha_5 > \pi \tag{2.19}$$

und nach Lemma 2.19

$$a\alpha_1 + \alpha_3 = b\alpha_1 + \alpha_4 = \pi, \quad a, b \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad (2.20)$$

$$l\alpha_1 \neq \alpha_2 \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Aus (2.17) und (2.18) folgt  $\alpha_3 + \gamma > \pi$  und  $\alpha_4 + \gamma > \pi$  für  $\gamma \in \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ . Deshalb haben genau folgende Summen der untersuchten Form den Wert  $\pi$

$$a\alpha_1 + \alpha_3 \quad \text{mit } a \in \mathbb{N},$$

$$b\alpha_1 + \alpha_4 \quad \text{mit } b \in \mathbb{N}.$$

Wegen (2.17) und (2.18) können ausschließlich die Summen

$$l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta, \quad \beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}, \quad l, m \in \mathbb{N}_0,$$

$$l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta + \gamma, \quad \beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}, \gamma \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \quad l \in \mathbb{N}_0, m \in \{0, 1\},$$

$$l\alpha_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2, \quad \beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}, \gamma_1, \gamma_2 \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \quad l \in \mathbb{N}_0$$

den Wert  $2\pi$  annehmen. Aus (2.17) folgt  $2\alpha_1 + \beta < \alpha_1 + \alpha_2 + \beta < 2\alpha_2 + \beta < 2\pi$  für  $\beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ . Deshalb können nur folgende Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + m\alpha_2 + \beta$  mit  $\beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ ,  $l, m \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $2\pi$  ergeben

$$l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{mit } l, m \in \mathbb{N}_0, \quad l + m \geq 3,$$

$$l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_4 \quad \text{mit } l, m \in \mathbb{N}_0, \quad l + m \geq 3.$$

Nach (2.17), (2.19) und (2.20) gilt  $a\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 < 2\pi < (a+1)\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$  und  $b\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 < 2\pi < (b+1)\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5$  für  $a, b \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt  $l\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 \neq 2\pi$  und  $l\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 \neq 2\pi$  für alle  $l \in \mathbb{N}_0$ . Deshalb können nur folgende Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + \beta + \gamma$  mit  $\beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ ,  $\gamma \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $2\pi$  ergeben

$$2a\alpha_1 + 2\alpha_3 \quad \text{mit } a \in \mathbb{N},$$

$$(a+b)\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{N},$$

$$2b\alpha_1 + 2\alpha_4 \quad \text{mit } b \in \mathbb{N}.$$

Aus (2.20) und (2.21) folgt  $l\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma \neq 2\pi$  für  $\beta, \gamma \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ . Denn würde  $l\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$  oder  $l\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 2\pi$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$  gelten, müßte nach (2.20) für  $m = 2a - l$ ,  $m = a + b - l$  oder  $m = 2b - l$  die Beziehung  $m\alpha_1 = \alpha_2$  erfüllt sein – im Widerspruch zu (2.21). Aus  $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 3\pi$  folgt mit (2.16) die Ungleichung  $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \geq 2\pi$ . Somit können nur folgende Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma$  mit  $\beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ ,  $\gamma \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $2\pi$  ergeben

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5,$$

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5.$$



Aus  $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \geq 2\pi$  und  $\alpha_2 < \alpha_3 \leq \alpha_4 < \alpha_5$  folgt  $\beta_1 + \beta_2 + \alpha_5 > 2\pi$  für  $\beta_1, \beta_2 \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ . Weil außerdem  $l\alpha_1 + 3\alpha_3 \neq 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \neq 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \neq 2\pi$  und  $l\alpha_1 + 3\alpha_4 \neq 2\pi$  für alle  $l \in \mathbb{N}_0$  gelten soll, sind die Summen der Gestalt  $l\alpha_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2$  mit  $\beta \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$  alle ungleich  $2\pi$ .

Bei jeder Summe der untersuchten Form, die den Wert  $\pi$  oder den Wert  $2\pi$  annehmen kann, gibt es pro Summand  $\alpha_3$  bzw.  $\alpha_4$  einen Summand  $\alpha_1$  oder  $\alpha_2$ . Somit muß für jede Ecke 3 bzw. 4 eines Zerlegungsfünfecks  $F_i$ , die nicht in einer Ecke von  $F$  liegt, mindestens eine Ecke 1 oder 2 eines anderen Zerlegungsfünfecks existieren. In den Ecken von  $F$  können wegen  $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} < \alpha_3 \leq \alpha_4$  insgesamt höchstens drei Ecken mit der Nummer 3 oder 4 von Zerlegungsfünfecken liegen. Dagegen muß wegen  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$  und (2.21) die Ecke 1 von  $F$  mit der Ecke 1 eines Zerlegungsfünfecks und die Ecke 2 von  $F$  mit der Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks übereinstimmen. Außerdem gibt es zwei weitere Ecken mit der Nummer 2 von Zerlegungsfünfecken, die nicht mit einer Ecke 3 oder 4 eines anderen Zerlegungsfünfecks übereinstimmen. Denn nach Lemma 2.14 müssen in einem Randpunkt von  $F$  zwei Ecken  $d$  und  $e$  mit  $d \neq 1$  und  $e \neq 1$  liegen. Weil die Summe der zugehörigen Innenwinkelgrößen nicht größer als  $\pi$  sein kann, andererseits aber  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  ist, muß  $d = e = 2$  gelten.

Die Anzahl der Ecken 1 und 2 der Zerlegungsfünfecke ist demnach größer als die Anzahl der Ecken 3 und 4, was unmöglich ist. Folglich gibt es eine Zahl  $l \in \mathbb{N}_0$  mit  $l\alpha_1 + 3\alpha_3 = 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 2\pi$  oder  $l\alpha_1 + 3\alpha_4 = 2\pi$ .  $\square$

**Lemma 2.21.** *Ist ein konvexes Fünfeck selbstähnlich, dann gilt  $\alpha_3 = \alpha_4$ .*

**Beweis.** Sei  $F$  ein  $k$ -selbstähnliches konvexes Fünfeck, d. h.  $F = F_1 + \dots + F_k$  mit  $F_i \sim F$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Angenommen, es gilt  $\alpha_3 \neq \alpha_4$ . Dann gilt nach Lemma 2.16 und nach Lemma 2.18

$$\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \pi \quad \text{und} \quad (2.22)$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 > \pi, \quad (2.23)$$

nach Lemma 2.17

$$\alpha_1 + \alpha_5 > \pi \quad (2.24)$$

und nach Lemma 2.19

$$a\alpha_1 + \alpha_3 = \pi, \quad a \in \mathbb{N}, a \geq 2, \quad (2.25)$$

$$b\alpha_1 + \alpha_4 = \pi, \quad b \in \mathbb{N}, \quad (2.26)$$

$$l\alpha_1 \neq \alpha_2 \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad (2.27)$$

$$c\alpha_1 + d\alpha_2 = \pi, \quad c \in \mathbb{N}_0, d \in \mathbb{N}. \quad (2.28)$$

Aus  $6\pi = 2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_5 < 2\alpha_1 + \pi + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\pi$  folgt mit (2.25) die Ungleichung  $\alpha_3 + 2\alpha_4 > 2\pi$ . Außerdem folgt aus  $6\pi = 2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_5 < 2\alpha_1 + \pi + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\pi$  mit (2.26) die Ungleichung  $\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 > 2\pi$ . Da nach Lemma 2.20 für eine Zahl

$l \in \mathbb{N}_0$  gelten muß  $l\alpha_1 + 3\alpha_3 = 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ ,  $l\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 2\pi$  oder  $l\alpha_1 + 3\alpha_4 = 2\pi$ , tritt somit einer der folgenden Fälle ein:

1. Fall:  $2\alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ ,

2. Fall:  $2\alpha_3 + \alpha_4 \neq 2\pi$  und  $l\alpha_1 + 3\alpha_3 = 2\pi$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$ .

Im 1. Fall gilt  $6\pi = 2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_5 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\pi + \alpha_4 + 2\alpha_5 < 2\alpha_1 + \pi + 2\pi + \alpha_4 + 2\pi$ , also  $2\alpha_1 + \alpha_4 > \pi$ . Zusammen mit (2.26) ergibt sich  $\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$ . Es gilt jetzt also  $2\alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ ,  $a\alpha_1 + \alpha_3 = \pi$  ( $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ) und  $\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$ . Daraus folgt

$$\alpha_1 = \frac{1}{2a+1}\pi, \quad \alpha_3 = \frac{a+1}{2a+1}\pi, \quad \alpha_4 = \frac{2a}{2a+1}\pi. \quad (2.29)$$

Ferner ergibt sich mit  $\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$  und  $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 3\pi$

$$\alpha_5 = 3\pi - \alpha_1 - \dots - \alpha_4 = 2\pi - \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{3a+1}{2a+1}\pi - \alpha_2. \quad (2.30)$$

Für  $\alpha_2$  werden nun zwei Fälle unterschieden:

Fall 1.1:  $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ ,

Fall 1.2:  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Im Fall 1.1 erhält man mit (2.30) die Abschätzung  $\alpha_5 > \frac{4a+1}{2(2a+1)}\pi$ . Wegen  $\alpha_1 + \alpha_5 > \pi$  gibt es keine Summe der Form  $\alpha_5 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$ , die den Wert  $\pi$  hat. Die einzigen Summen der Form  $\alpha_5 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$ , die gleich  $2\pi$  sein können, sind

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \quad \text{und} \quad l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_5 \quad \text{mit} \quad l, m \in \mathbb{N}_0, l+m \geq 3.$$

Ist  $l\alpha_1 + \alpha_5 \neq 2\pi$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ , muß demzufolge jede Ecke 5 eines Zerlegungsfünfecks  $F_i$ , die nicht in einer Ecke von  $F$  liegt, mit einer Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks übereinstimmen. Die Ecke 5 ist wegen  $\alpha_1, \dots, \alpha_4 < \alpha_5$  die einzige Ecke von  $F$ , in der eine Ecke mit der Nummer 5 liegen kann. Dagegen muß es nach Lemma 2.14 wegen  $\alpha_1 < \alpha_2$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  auf dem Rand von  $F$  einen Punkt geben, in dem zwei Ecken 2 von Zerlegungsfünfecken liegen, die nicht mit einer Ecke 5 übereinstimmen. Man erhält also einen Widerspruch, wenn man zum einen die Ecken mit der Nummer 2 und zum anderen die Ecken mit der Nummer 5 der Zerlegungsfünfecke  $F_i$  zählt.

Folglich gilt  $l\alpha_1 + \alpha_5 = 2\pi$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ . Zusammen mit (2.29) erhält man

$$\alpha_5 = \frac{4a+2-l}{2a+1}\pi.$$

Aus  $\alpha_5 < \pi$  und  $a, l \in \mathbb{N}$  folgt somit  $4a+2-l+1 \leq 2a+1$ . Daraus ergibt sich  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$  im Widerspruch zu (2.24).

Im Fall 1.2 folgt aus (2.29) und (2.30)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2a+1}\pi, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{a+1}{2a+1}\pi, \quad \alpha_4 = \frac{2a}{2a+1}\pi, \quad \alpha_5 = \frac{4a+1}{2(2a+1)}\pi$$

mit  $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Genau folgende Winkelsummen sind demnach gleich  $\pi$

$$s_1 := \alpha_2 + \alpha_2, \quad s_2 := a\alpha_1 + \alpha_3, \quad s_3 := \alpha_1 + \alpha_4, \quad s_4 := (2a + 1)\alpha_1.$$

Betrachtet man nur solche Summen  $\beta_1 + \dots + \beta_n$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$ , für die  $\beta_{i_1} + \dots + \beta_{i_j} \neq \pi$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n$ , gilt, so ergeben genau folgende Summen  $2\pi$

$$\begin{aligned} s_5 &:= (a + 1)\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5, \quad s_6 := \alpha_1 + 2\alpha_5, \quad s_7 := \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5, \\ s_8 &:= (a - 1)\alpha_1 + 3\alpha_3, \quad s_9 := 2\alpha_3 + \alpha_4. \end{aligned}$$

Jetzt sollen die Ecken 1, die Ecken 3, die Ecken 4 und die Ecken 5 der Zerlegungs-fünfecke  $F_i$  gezählt und die Zahlen miteinander verglichen werden. Dazu wird für jede der neun Summen  $s_1, \dots, s_9$  eine Zahl  $k_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $i \in \{1, \dots, 9\}$ , wie folgt definiert: Die Zahl  $k_1$  gebe an, wieviele Knoten der Zerlegung von  $F$  mit zwei Ecken mit der Nummer 2 übereinstimmen. Stimmt ein Knoten mit vier Ecken mit der Nummer 2 überein, so wird dieser Knoten doppelt gezählt. Die Zahl  $k_2$  wird analog für  $a$  Ecken mit der Nummer 1 und eine Ecke mit der Nummer 3 erklärt. Die Zahl  $k_3$  für eine Ecke mit der Nummer 1 und eine Ecke mit der Nummer 4, usw. Die Zahl  $k_9$  ist schließlich die Anzahl der Knoten der Zerlegung von  $F$ , die mit zwei Ecken mit der Nummer 3 und mit einer Ecke mit der Nummer 4 übereinstimmen.

Für die Ecken von  $F$  gilt: Die Ecke 1 von  $F$  muß mit der Ecke 1 eines Fünfecks  $F_i$ , die Ecke 2 von  $F$  mit der Ecke 2 eines Fünfecks  $F_i$  übereinstimmen. Auf Grund der Lage der Ecken zueinander (vgl. Lemma 2.19) kann in der Ecke 3 von  $F$  keine Ecke mit der Nummer 3 und in der Ecke 4 von  $F$  keine Ecke mit der Nummer 4 liegen. Denn sonst müßte nach Lemma 2.2 gelten  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$ . Deshalb liegen in der Ecke 3 von  $F$   $a + 1$  Ecken 1, in der Ecke 4 von  $F$  entweder  $2a$  Ecken 1 oder  $a - 1$  Ecken 1 und eine Ecke 3, in der Ecke 5 von  $F$  entweder  $a$  Ecken 1 und eine Ecke 2 oder eine Ecke 5. In der folgenden Tabelle ist zusammengefaßt, wieviele Ecken mit der Nummer 1, der Nummer 3, der Nummer 4 oder der Nummer 5 der Zerlegungs-fünfecke  $F_i$  jeweils in der Ecke  $e \in \{1, \dots, 5\}$  von  $F$  liegen können.

Ecke $e$ von $F$	Ecken 1	Ecken 3	Ecken 4	Ecken 5
1	1	0	0	0
2	0	0	0	0
3	$a + 1$	0	0	0
4	$a - 1 \vee 2a$	$0 \vee 1$	0	0
5	$0 \vee a$	0	0	$0 \vee 1$

Für die Anzahl  $k$  der Fünfecke  $F_i$  erhält man somit, wenn man die Ecken mit der Nummer 1 zählt

$$k \geq ak_2 + k_3 + (2a + 1)k_4 + (a + 1)k_5 + k_6 + (a - 1)k_8 + 2a + 1 =: n_1,$$

wenn man die Ecken mit der Nummer 3 zählt

$$k \leq k_2 + k_7 + 3k_8 + 2k_9 + 1 =: n_2 \quad \text{und} \quad k \geq k_2 + k_7 + 3k_8 + 2k_9 =: n_3,$$

wenn man die Ecken mit der Nummer 4 zählt

$$k = k_3 + k_9 =: n_4,$$

wenn man die Ecken mit der Nummer 5 zählt

$$k \leq k_5 + 2k_6 + k_7 + 1 =: n_5.$$

Es gilt  $2n_1 \leq 2k \leq n_2 + n_5$ . Zusammen mit  $a \geq 2$  folgt daraus

$$4k_2 + 2k_3 + 10k_4 + 6k_5 + 2k_6 + 2k_8 + 10 \leq k_2 + k_5 + 2k_6 + 2k_7 + 3k_8 + 2k_9 + 2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$3k_2 + 2k_3 + 10k_4 + 5k_5 - 2k_7 - k_8 + 8 \leq 2k_9.$$

Aus  $n_3 \leq k = n_4$  folgt  $k_9 \leq -k_2 + k_3 - k_7 - 3k_8$ . Damit ergibt sich

$$5k_2 + 10k_4 + 5k_5 + 5k_8 + 8 \leq 0.$$

Dies steht im Widerspruch zu  $k_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, 9$ . Da sowohl der Fall 1.1 als auch der Fall 1.2 zu einem Widerspruch führt, kann der 1. Fall nicht eintreten.

Im 2. Fall wird zunächst untersucht, welche Summen der Form  $\alpha_4 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$ , den Wert  $\pi$  bzw.  $2\pi$  haben können. Wegen  $\alpha_2 + \alpha_4 > \alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  ist

$$b\alpha_1 + \alpha_4 \quad \text{mit } b \in \mathbb{N}$$

die einzige Summe der untersuchten Form, die gleich  $\pi$  ist. Aus  $\alpha_1 + \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_4 \leq \pi$  folgt  $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 > 2\pi$ . Wegen (2.25), (2.26) und (2.27) gilt ferner  $l\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \gamma \neq 2\pi$  für  $\gamma \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ . Denn würde  $l\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$  oder  $l\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 2\pi$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$  gelten, müßte nach (2.25) und (2.26) für  $m = a + b - l$  oder  $m = 2b - l$  die Beziehung  $m\alpha_1 = \alpha_2$  erfüllt sein – im Widerspruch zu (2.27). Da im 2. Fall außerdem  $l\alpha_1 + \alpha_4 + \gamma_1 + \gamma_2 \neq 2\pi$  für alle  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \{\alpha_3, \alpha_4\}$  gilt, können also nur die Summen

$$\begin{aligned} (a+b)\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 & \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{N}, a \geq 2, \\ 2b\alpha_1 + 2\alpha_4 & \quad \text{mit } b \in \mathbb{N}, \\ l\alpha_1 + m\alpha_2 + \alpha_4 & \quad \text{mit } l, m \in \mathbb{N}_0, l + m \geq 3 \end{aligned}$$

gleich  $2\pi$  sein.

Für die Ecken von  $F$  gilt: Wegen  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$  kann in den Ecken 1, 2 und 3 von  $F$  keine Ecke 4 eines Fünfecks  $F_i$  liegen. Auch in der Ecke 4 von  $F$  kann keine Ecke 4 liegen. Denn da nach Lemma 2.19 die Ecken mit den Nummern 4 und 5 von  $F$  Nachbarecken sind, müßte sonst nach Lemma 2.2 gelten  $\alpha_1 + \alpha_5 \leq \pi$ . Die Ecke 5 ist also die einzige Ecke von  $F$ , in der eine Ecke 4 eines Fünfecks  $F_i$  liegen kann. Liegt in der Ecke 5 von  $F$  eine Ecke 4 eines Fünfecks  $F_i$ , dann muß

sie auf Grund der Beziehungen  $\alpha_4 < \alpha_5$  und  $\alpha_2 + \alpha_4 > \alpha_5$  mit der Ecke 1 eines anderen Zerlegungsfünfecks übereinstimmen. Dagegen muß wegen  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$  und (2.27) in der Ecke 1 von  $F$  eine Ecke 1 und in der Ecke 2 von  $F$  eine Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks liegen. Es existiert also mindestens ein Fünfeck  $F_i$ , dessen Ecke 1, und ein Fünfeck  $F_i$ , dessen Ecke 2 nicht mit der Ecke 4 eines anderen Zerlegungsfünfecks übereinstimmt.

Man sieht jetzt, daß  $b = 1$  also

$$\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$$

gilt. Denn für  $b \geq 2$  erhält man einen Widerspruch, wenn man einerseits die Ecken 1 und 2 und andererseits die Ecken 4 der Fünfecke  $F_i$  zählt.

Außerdem existiert eine natürliche Zahl  $m \geq 3$  mit

$$m\alpha_2 + \alpha_4 = 2\pi.$$

Ansonsten würde die Ecke 4 jedes Zerlegungsfünfecks mit der Ecke 1 eines anderen Zerlegungsfünfecks übereinstimmen. Es gibt aber mindestens ein Fünfeck  $F_i$ , dessen Ecke 1 nicht mit einer Ecke 4 übereinstimmt.

Als nächstes soll die Zahl  $m$  bestimmt werden. Aus  $m\alpha_2 + \alpha_4 = 2\pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_4 > \pi$  folgt  $\alpha_2 < \frac{1}{m-1}\pi$ . Andererseits gilt wegen  $\alpha_3 \leq \frac{2}{3}\pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  die Abschätzung  $\alpha_2 > \frac{\pi}{3}$ . Insgesamt erhält man  $\frac{\pi}{3} < \alpha_2 < \frac{1}{m-1}\pi$  und damit  $m < 4$ . Daraus folgt  $m = 3$ . Es gilt also  $3\alpha_2 + \alpha_4 = 2\pi$  und  $\frac{\pi}{3} < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ .

Aus  $\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$  und  $3\alpha_2 + \alpha_4 = 2\pi$  ergibt sich  $9\pi = 3\alpha_1 + \dots + 3\alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_3 + 3\alpha_5 + 2\pi + 2\pi < \alpha_1 + 3\alpha_3 + 3\pi + 2\pi + 2\pi$ , also  $\alpha_1 + 3\alpha_3 > 2\pi$ . Deshalb muß nach der Bedingung für den 2. Fall  $3\alpha_3 = 2\pi$  gelten, das bedeutet  $\alpha_3 = \frac{2}{3}\pi$ . Aus  $\alpha_3 = \frac{2}{3}\pi$  und (2.25) folgt

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3a}.$$

Zusammen mit  $\alpha_1 + \alpha_4 = \pi$  und  $3\alpha_2 + \alpha_4 = 2\pi$  erhält man

$$\alpha_2 = \frac{3a+1}{9a}\pi.$$

Aus  $\frac{\pi}{3} < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$  und (2.28) folgt jetzt, daß es  $c \in \mathbb{N}$  und  $d \in \{1, 2\}$  gibt mit

$$2\pi = c\alpha_1 + d\alpha_2 = c \frac{1}{3a}\pi + d \frac{3a+1}{9a}\pi.$$

Die Gleichung  $2\pi = c \frac{1}{3a}\pi + d \frac{3a+1}{9a}\pi$  ist äquivalent zu  $6a = c + ad + \frac{d}{3}$ . Dies ist jedoch für  $a, c \in \mathbb{N}$  und  $d \in \{1, 2\}$  nicht möglich. Also führt auch der 2. Fall zu einem Widerspruch.  $\square$

**Satz 2.22.** *Ein konvexes Fünfeck kann höchstens dann selbstähnlich sein, wenn die Innenwinkel die Größe*

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\pi, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\pi, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}\pi, \quad \alpha_5 = \frac{5}{6}\pi$$

*haben und die Eckenreihenfolge gleich 1,2,3,5,4 bzw. 1,2,4,5,3 ist.*

**Beweis.** Sei  $F$  ein selbstähnliches konvexes Fünfeck. Nach Lemma 2.21 ist dann  $\alpha_3 = \alpha_4$ . Somit gibt es nach Lemma 2.20 eine Zahl  $l \in \mathbb{N}_0$  mit  $l\alpha_1 + 3\alpha_3 = 2\pi$ . Ferner folgt aus  $9\pi = 3\alpha_1 + \dots + 3\alpha_5 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_5 < 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\pi$  und  $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$  (Lemma 2.16) die Ungleichung  $6\pi < 2\alpha_1 + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi + 6\alpha_3$ , also  $\alpha_1 + 3\alpha_3 > 2\pi$ . Demnach gilt  $3\alpha_3 = 2\pi$ , d. h.

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}\pi.$$

Für  $\alpha_1$  gilt nach Lemma 2.19 die Beziehung  $l_1\alpha_1 + \alpha_3 = \pi$  mit  $l_1 \in \mathbb{N}$ . Daraus ergibt sich nun  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3l_1}$ . Aus  $3\pi = \alpha_1 + \dots + \alpha_5 < \alpha_1 + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi + \pi$  folgt andererseits  $\alpha_1 > \frac{\pi}{6}$ . Es gilt also

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}.$$

Für  $\alpha_2$  gilt nach Lemma 2.19 die Beziehung  $m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = \pi$  mit  $m_1 \in \mathbb{N}_0, m_2 \in \mathbb{N}$ . Zusammen mit  $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$  erhält man jetzt  $m_1 = 0$  und  $m_2 = 2$ , das bedeutet

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Für  $\alpha_5$  ergibt sich somit

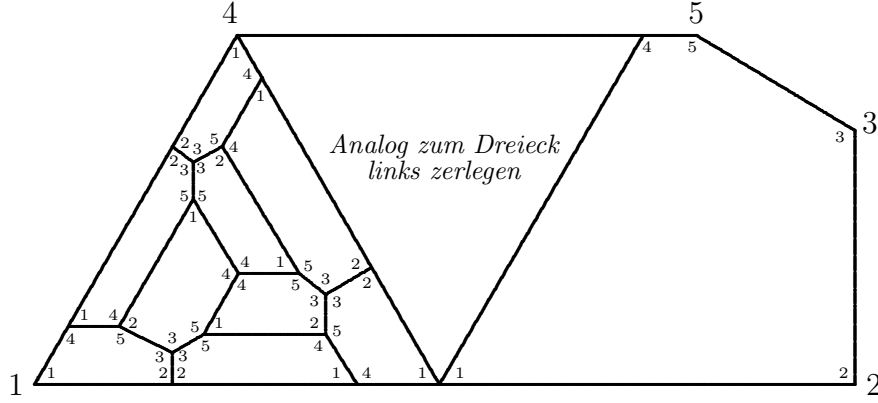
$$\alpha_5 = \frac{5}{6}\pi.$$

Weiterhin ist nach Lemma 2.19 die Reihenfolge der Ecken von  $F$  gleich 1,2,3,5,4 oder gleich 1,2,4,5,3.  $\square$

Ein Fünfeck mit den Innenwinkelgrößen  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha_5 = \frac{5}{6}\pi$  und der Eckenreihenfolge 1,2,3,5,4, das selbstähnlich ist, ist nicht bekannt. Es ist aber möglich, diese Fünfecke in Fünfecke, die die gleichen Innenwinkelgrößen und die gleiche Eckenreihenfolge haben, zu zerlegen (siehe Abbildung 2.34). Außerdem gestatten Fünfecke mit den Innenwinkelgrößen  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha_5 = \frac{5}{6}\pi$  und der Eckenreihenfolge 1,2,3,5,4 eine Zerlegung der Ebene in paarweise kongruente Fünfecke [12, Seite 492].

Man kann die Voraussetzungen des Satzes 2.22 abschwächen. Beim Beweis wurde lediglich ausgenutzt, daß bei einer  $k$ -selbstähnlichen Zerlegung  $F = F_1 + \dots + F_k$  eines konvexen Fünfecks  $F$  die Zerlegungsfünfecke  $F_1, \dots, F_k$  die gleichen Innenwinkelgrößen und die gleiche Eckenreihenfolge haben wie  $F$  und daß jede Seite von  $F_1, \dots, F_k$  kürzer als die entsprechende Seite von  $F$  ist. Gibt es eine Zerlegung  $F = F_1 + \dots + F_k$  eines konvexen Fünfecks  $F$  mit diesen Eigenschaften, d. h. haben  $F_1, \dots, F_k$  die gleichen Innenwinkelgrößen und die gleiche Eckenreihenfolge wie  $F$  und ist außerdem eine Seite, deren Endpunkte die Nummern  $e, f \in \{1, \dots, 5\}$  haben, von  $F_1, \dots, F_k$  kürzer als die entsprechende Seite von  $F$ , muß  $F$  folglich die Innenwinkelgrößen  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha_5 = \frac{5}{6}\pi$  und die Eckenreihenfolge 1,2,3,5,4 haben.

Fordert man zusätzlich zur Ähnlichkeit noch die Kongruenz der Zerlegungsteile, kann man beweisen

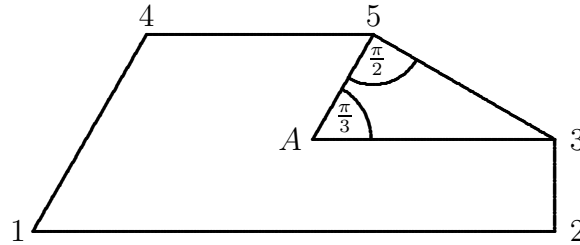


Abbildungung 2.34: Gleichwinklige Zerlegung eines Fünfecks mit den Innenwinkelgrößen  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha_5 = \frac{5}{6}\pi$  und der Eckenreihenfolge 1,2,3,5,4

**Satz 2.23.** *Kein konvexes Fünfeck ist replizierend.*

**Beweis.** Angenommen,  $F$  ist ein  $k$ -replizierendes konvexes Fünfeck, d. h.  $F = F_1 + \dots + F_k$  mit  $F_i \cong F_1 \sim F$ ,  $i = 2, \dots, k$ . Nach Satz 2.22 muß  $F$  dann die Innenwinkelgrößen  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha_5 = \frac{5}{6}\pi$  haben. Weiterhin können die Ecken von  $F$  so numeriert werden, daß die Eckenreihenfolge gleich 1,2,3,5,4 ist.

Eine Strecke mit den Endpunkten  $d$  und  $e$  soll wieder mit  $s(d, e)$  und die Länge dieser Strecke mit  $|s(d, e)|$  bezeichnet werden. Für die Seitenlängen des Fünfecks  $F$  (und damit auch für die Seitenlängen der Zerlegungsfünfecke  $F_i$ ) gilt  $|s(1, 2)| > |s(3, 5)|$ . Zum Beweis betrachte man das Dreieck mit den Ecken 3, 5 und  $A$ , wobei der Punkt  $A$  der Schnittpunkt der Parallelen zur Seite  $s(1, 2)$  von  $F$  durch die Ecke 3 von  $F$  und der Parallelen zur Seite  $s(1, 4)$  durch die Ecke 5 ist. Der Innenwinkel des Dreiecks bei der Ecke  $A$  hat die Größe  $\frac{\pi}{3}$  und der Innenwinkel des Dreiecks bei der Ecke 5 die Größe  $\frac{\pi}{2}$ . Daraus folgt  $|s(A, 3)| > |s(3, 5)|$ . Da außerdem  $|s(1, 2)| > |s(A, 3)|$  gilt, erhält man  $|s(1, 2)| > |s(3, 5)|$ . Desweiteren gilt offensichtlich  $|s(1, 2)| > |s(4, 5)|$  und  $|s(1, 4)| > |s(2, 3)|$ .



Abbildungung 2.35: Definition des Punktes  $A$

Nun wird die  $k$ -replizierende Zerlegung  $F = F_1 + \dots + F_k$  in einer Umgebung der Ecke 1 von  $F$  betrachtet. Auf Grund der Größe der Innenwinkel von  $F$  gilt: In der Ecke 1 von  $F$  muß die Ecke 1 eines Zerlegungsfünfecks  $F_{i_0}$ ,  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ , liegen.

Die Ecke 4 von  $F_{i_0}$  kann nicht in der Ecke 2 von  $F$  liegen. Da einander entsprechende Seiten von  $F$  und  $F_{i_0}$  nicht gleich lang sind, kann sie auch nicht in der Ecke 4 von  $F$  liegen. Sie muß also im relativen Inneren einer Seite von  $F$  liegen und somit mit der Ecke 1 eines Zerlegungsvierecks  $F_{i_1}$ ,  $i_1 \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_0\}$ , übereinstimmen.

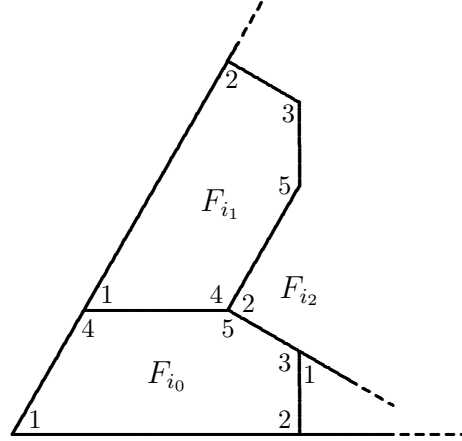


Abbildung 2.36: Replizierende Zerlegung eines konvexen Fünfecks in einer Umgebung der Ecke 1

Die Ecke 5 eines Zerlegungsfünfecks kann nicht im relativen Inneren einer Seite liegen. Denn sonst müßte der zugehörige Innenwinkel durch Innenwinkel anderer Zerlegungsfünfecke zu einem Winkel der Größe  $\pi$  ergänzt werden. Dies ist aber wegen  $\alpha_1 + \alpha_5 > \pi$  nicht möglich. Da  $|s(1, 2)| > |s(4, 5)|$  ist, kann somit die Seite  $s(1, 2)$  von  $F_{i_1}$  nicht an der Seite  $s(4, 5)$  von  $F_{i_0}$  liegen. Also liegt die Seite  $s(1, 4)$  von  $F_{i_1}$  an der Seite  $s(4, 5)$  von  $F_{i_0}$ . Die beiden Seiten stimmen entweder überein, d. h. die Ecke 4 von  $F_{i_1}$  stimmt mit der Ecke 5 von  $F_{i_0}$  überein, oder die Ecke 4 von  $F_{i_1}$  liegt im relativen Inneren der Seite  $s(4, 5)$  von  $F_{i_0}$ . Hier wird nur der erste Fall betrachtet. Der zweite Fall führt analog zu einem Widerspruch, da auch in diesem Fall die Ecke 5 von  $F_{i_0}$  mit der Ecke 4 eines Zerlegungsfünfecks übereinstimmen muß.

Im ersten Fall gilt  $|s(4, 5)| = |s(1, 4)|$ , also  $|s(1, 2)| > |s(4, 5)| = |s(1, 4)| > |s(2, 3)|$ . Wegen  $2\pi - \alpha_4 - \alpha_5 = \frac{\pi}{2}$  muß die Ecke 5 von  $F_{i_0}$  bzw. die Ecke 4 von  $F_{i_1}$  mit der Ecke 2 eines Zerlegungsfünfecks  $F_{i_2}$ ,  $i_2 \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_0, i_1\}$ , übereinstimmen. Da die Ecke 5 von  $F_{i_1}$  nicht im relativen Inneren einer Seite liegen kann, andererseits aber  $|s(1, 2)| > |s(4, 5)|$  ist, kann die Seite  $s(1, 2)$  von  $F_{i_2}$  nicht an der Seite  $s(4, 5)$  von  $F_{i_1}$  liegen. Sie muß also an der Seite  $s(3, 5)$  von  $F_{i_0}$  liegen. Wegen  $|s(1, 2)| > |s(3, 5)|$  liegt die Ecke 3 von  $F_{i_0}$  im relativen Inneren der Seite  $s(1, 2)$  von  $F_{i_2}$ . Somit muß die Ecke 3 von  $F_{i_0}$  mit der Ecke 1 eines Zerlegungsfünfecks übereinstimmen, und die Seite  $s(1, 2)$  oder die Seite  $s(1, 4)$  dieses Zerlegungsfünfecks muß an der Seite  $s(2, 3)$  von  $F_{i_0}$  liegen. Dies führt aber mit  $|s(1, 2)| > |s(2, 3)|$  und  $|s(1, 4)| > |s(2, 3)|$  zu einem Widerspruch.  $\square$

Mit wenigen zusätzlichen Überlegungen läßt sich der Satz 2.23 auch beweisen, wenn statt des Satzes 2.22 nur das Lemma 2.16, das Lemma 2.17 und das Lemma 2.19



benutzt werden. Einen Beweis des Satzes 2.23 findet man auch in [2]. Als eine Folgerung aus Satz 2.1, Satz 2.9 und Satz 2.23 ergibt sich

**Satz 2.24.** *Ist ein konvexes  $n$ -Eck replizierend, so ist es ein Dreieck, ein Trapez oder ein Sehnenviereck.*

## Kapitel 3

### Selbstähnlichkeit nichtkonvexer $n$ -Ecke

Im folgenden Kapitel werden nichtkonvexe  $n$ -Ecke hinsichtlich Selbstähnlichkeit untersucht. Zunächst werden notwendige Bedingungen für die Selbstähnlichkeit nichtkonvexer  $n$ -Ecke bewiesen. Anschließend wird gezeigt, daß für  $n = 5$  und für jede gerade Zahl  $n \geq 6$  replizierende nichtkonvexe  $n$ -Ecke existieren. Es werden folgende Begriffe verwendet:

**Definition 3.1.** Eine Ecke eines  $n$ -Ecks heißt *Konvexecke*, wenn der zugehörige Innenwinkel kleiner als  $\pi$  ist. Wenn der zugehörige Innenwinkel größer als  $\pi$  ist, heißt die Ecke *Reflexecke*.

#### 3.1 Notwendige Bedingungen für die Selbstähnlichkeit

**Lemma 3.1.** *Ist ein nichtkonvexes  $n$ -Eck selbstähnlich, dann muß für die Anzahl  $r$  der Reflexecken gelten  $r < \frac{n}{2} - 1$ .*

**Beweis.** Sei  $P$  ein nichtkonvexes  $n$ -Eck mit  $r$  Reflexecken. Außerdem sei  $P$   $k$ -selbstähnlich, d.h. es existieren zu  $P$  ähnliche  $n$ -Ecke  $P_1, \dots, P_k$  mit  $P = P_1 + \dots + P_k$ . Die Innenwinkelgrößen von  $P$  und von  $P_1, \dots, P_k$  werden mit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  bezeichnet. Sie werden so numeriert, daß gilt  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} < \pi < \alpha_{n-r+1}, \dots, \alpha_n$ .

Bei der Zerlegung  $P = P_1 + \dots + P_k$  können die Reflexecken der  $n$ -Ecke  $P_1, \dots, P_k$  nur in den Reflexecken von  $P$  oder im Inneren von  $P$  liegen. Liegt eine Reflexecke eines Zerlegungspolygons im Inneren von  $P$ , muß der zugehörige Außenwinkel in Innenwinkel anderer Zerlegungspolygone zerlegt werden. Dies ist nur durch die Innenwinkel der Größe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$  der Polygone  $P_1, \dots, P_k$  möglich. Somit müssen die Außenwinkel zu den Reflexecken von  $P_1, \dots, P_k$  durch Innenwinkel der Größe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$  von Polygonen  $P_1, \dots, P_k$  und durch die Außenwinkel zu den Reflexecken von  $P$  ausgefüllt werden. Für die Summe der Größen der Außenwinkel zu den Reflexecken von  $P_1, \dots, P_k$  ergibt sich demnach

$$k((2\pi - \alpha_{n-r+1}) + \dots + (2\pi - \alpha_n)) \leq k(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-r}) + (2\pi - \alpha_{n-r+1}) + \dots + (2\pi - \alpha_n) .$$

Ferner müssen die Innenwinkel der Größe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$  von  $P$  in Innenwinkel der Größe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$  von  $n$ -Ecken  $P_1, \dots, P_k$  zerlegt werden. Es muß also sogar

$$k((2\pi - \alpha_{n-r+1}) + \dots + (2\pi - \alpha_n)) \leq (k-1)(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-r}) + (2\pi - \alpha_{n-r+1}) + \dots + (2\pi - \alpha_n) \quad (3.1)$$

gelten. Da die  $n$ -Ecke  $P_1, \dots, P_k$  ähnlich aber nicht kongruent zu  $P$  sind, kann die längste Seite von  $P$  nicht mit einer Seite eines  $n$ -Ecks  $P_i$  übereinstimmen. Es müssen folglich Ecken von Polygonen  $P_1, \dots, P_k$  existieren, die im relativen Inneren einer Seite von  $P$  liegen. Dies können nur Konvexecken sein. Also ist ein Winkel der Größe  $\pi$  in Innenwinkel der Größe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$  von  $n$ -Ecken  $P_1, \dots, P_k$  zerlegt. Deshalb kann in der Ungleichung (3.1) keine Gleichheit eintreten. Aus der Ungleichung (3.1) folgt demnach

$$r2\pi - \alpha_{n-r+1} - \dots - \alpha_n < \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-r}.$$

Da die Innenwinkelsumme im  $n$ -Eck gleich  $(n-2)\pi$  ist, erhält man somit

$$r2\pi - ((n-2)\pi - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-r})) < \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-r}.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu  $r < \frac{n}{2} - 1$ . □

Das Lemma 3.1 wird auch in [7] bewiesen. Unmittelbar aus Lemma 3.1 ergibt sich

**Folgerung 3.2.** *Kein nichtkonvexes Viereck ist selbstähnlich.*

Das nächste Lemma enthält eine weitere notwendige Bedingung für die Anzahl der Reflexecken eines nichtkonvexen selbstähnlichen  $n$ -Ecks.

**Lemma 3.3.** *Ist ein nichtkonvexes  $n$ -Eck selbstähnlich, dann muß für die Anzahl  $r$  der Reflexecken gelten  $r > \frac{n}{2} - 3$ .*

**Beweis.** Sei  $P$  ein nichtkonvexes  $n$ -Eck mit  $r$  Reflexecken. Es gelte  $P = P_1 + \dots + P_k$  mit  $P_i \sim P$  für  $i = 1, \dots, k$ . Nach einer Idee von E. Hertel [15] kann einer Zerlegung  $P = P_1 + \dots + P_k$  eines Polygons folgendermaßen ein ungerichteter Graph  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  zugeordnet werden: Die Knotenmenge  $\mathcal{V}$  ist die Menge aller Ecken der Polygone  $P_1, \dots, P_k$ . Für  $A, B \in \mathcal{V}$  gilt genau dann  $\{A, B\} \in \mathcal{E}$ , wenn die Strecke mit den Endpunkten  $A$  und  $B$  Teil einer Seite eines Polygons  $P_i$  ist und außerdem keine Ecke eines Polygons  $P_i$  im relativen Inneren dieser Strecke liegt. Es werden folgende Größen definiert:  $v$  sei die Anzahl der Knoten von  $\mathcal{G}$ ;  $v_2$  sei die Anzahl der Knoten von  $\mathcal{G}$ , deren Grad gleich 2 ist;  $v_3 := v - v_2$ , d. h.  $v_3$  ist die Anzahl der Knoten von  $\mathcal{G}$ , deren Grad mindestens gleich 3 ist;  $e$  sei die Anzahl der Kanten von  $\mathcal{G}$ .

Den Knotengrad 2 können außer den Ecken von  $P$  nur die Knoten haben, die im Inneren von  $P$  liegen und die mit genau einer Konvexecke und einer Reflexecke von Polygonen  $P_i$  übereinstimmen. Da die Anzahl der Reflexecken der Polygone  $P_i$  insgesamt  $kr$  beträgt und eine Reflexecke eines Polygons  $P_i$  entweder in einer Ecke

von  $P$  oder im Inneren von  $P$  liegt, muß somit für die Anzahl der Knoten vom Grad 2 gelten

$$v_2 \leq n + kr - r. \quad (3.2)$$

Die Anzahl der Kanten des Graphen kann man abschätzen, indem man die Knoten vom Grad 2 und die Knoten, deren Grad mindestens 3 ist, zählt. Es gilt  $2v_2 + 3v_3 \leq 2e$ . Daraus folgt  $2e \geq 3v - v_2$ . Zusammen mit (3.2) ergibt sich

$$2e \geq 3v - n - kr + r. \quad (3.3)$$

Nach dem Eulerschen Satz für planare Graphen gilt  $v - e + k = 1$ , also für die Anzahl der Knoten  $v = e - k + 1$ . Aus der Ungleichung (3.3) folgt damit für die Anzahl der Kanten von  $\mathcal{G}$

$$e \leq n + kr - r + 3k - 3. \quad (3.4)$$

Eine weitere Möglichkeit, die Anzahl der Kanten des Graphen abzuschätzen, besteht darin, die Anzahl der Seiten der  $n$ -Ecke  $P_1, \dots, P_k$  und  $P$  zu zählen. Jede Seite eines  $n$ -Ecks  $P_1, \dots, P_k$  und jede Seite von  $P$  erzeugt mindestens eine Kante von  $\mathcal{G}$ . Bei dieser Zählung wird jede Kante von  $\mathcal{G}$  aber zweimal erfaßt. Damit gilt

$$n + kn \leq 2e. \quad (3.5)$$

Gleichheit kann nur dann eintreten, wenn kein Knoten im relativen Inneren einer Seite eines  $n$ -Ecks  $P_i$  oder von  $P$  liegt. Dies ist jedoch nicht möglich, da bei der Zerlegung  $P = P_1 + \dots + P_k$  mit  $k \geq 2$  und  $P_i \sim P$ ,  $i = 1, \dots, k$ , eine Ecke eines  $n$ -Ecks  $P_i$  im relativen Inneren der längsten Seite von  $P$  liegen muß. Deshalb ist (3.5) eine echte Ungleichung. Aus den Ungleichungen (3.4) und (3.5) folgt jetzt

$$n + kn < 2n + 2kr - 2r + 6k - 6.$$

Dies ist gleichbedeutend mit  $k(n - 2r - 6) < n - 2r - 6$ . Wegen  $k \geq 2$  muß gelten  $n - 2r - 6 < 0$  bzw.  $r > \frac{n}{2} - 3$ .  $\square$

Faßt man die Aussagen des Lemmas 3.1 und des Lemmas 3.3 zusammen, erhält man folgende notwendige Bedingung für die Selbstähnlichkeit eines nichtkonvexen  $n$ -Ecks.

**Satz 3.4.** *Ist ein nichtkonvexes  $n$ -Eck selbstähnlich, dann muß für die Anzahl  $r$  der Reflexecken gelten*

$$r = \begin{cases} \frac{n}{2} - 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{n-5}{2} \text{ oder } \frac{n-3}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Eine weitere notwendige Bedingung für die Selbstähnlichkeit eines nichtkonvexen  $n$ -Ecks  $P$  lautet im Fall  $n$  gerade: Für jede der  $\frac{n}{2} - 2$  Reflexecken von  $P$  muß eine Konvexecke von  $P$  existieren, so daß die Summe der beiden zugehörigen Innenwinkelgrößen gleich  $2\pi$  ist. Umgekehrt muß auch für  $\frac{n}{2} - 2$  Konvexecken von  $P$  je eine

Reflexecke von  $P$  existieren, so daß die Summe der beiden zugehörigen Innenwinkelgrößen gleich  $2\pi$  ist. Die Reflexecken und die Konvexecken treten also in Paaren auf, bei denen die Summe der zugehörigen Innenwinkelgrößen immer gleich  $2\pi$  ist. Im Fall  $n$  ungerade müssen  $\frac{n-5}{2}$  Paare bestehend aus einer Reflexecke und einer Konvexecke, deren zugehörige Innenwinkelgrößen die Summe  $2\pi$  haben, existieren. (Insgesamt möglich wären in diesem Fall  $\frac{n-3}{2}$  solcher Paare.) Diese Aussagen folgen aus dem Beweis von Lemma 3.2. Denn gibt es bei einem nichtkonvexen  $n$ -Eck mit  $r$  Reflexecken höchstens  $r-1$  Paare bestehend aus einer Reflexecke und einer Konvexecke, deren zugehörige Innenwinkelgrößen die Summe  $2\pi$  haben, gilt für die beim Beweis definierte Größe  $v_2$  die Abschätzung  $v_2 \leq n + k(r-1) - (r-1)$ . Daraus folgt dann  $r > \frac{n}{2} - 2$ . Nach Lemma 3.1 muß somit  $n$  eine ungerade natürliche Zahl sein und  $r = \frac{n-3}{2}$  gelten. Gäbe es weniger als  $r-1$  solcher Paare, würde wegen  $v_2 \leq n + k(r-2) - (r-2)$  gelten  $r > \frac{n}{2} - 1$ . Dies steht im Widerspruch zum Lemma 3.1.

### 3.2 Replizierende nichtkonvexe $n$ -Ecke

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß für jede gerade Zahl  $n \geq 6$  sogar replizierende nichtkonvexe  $n$ -Ecke existieren. Dazu wird für alle geraden Zahlen  $n \geq 6$  eine Vorschrift zur Bestimmung eines replizierenden  $n$ -Ecks angegeben. Dabei wird ein Quadrat in zwei kongruente nichtkonvexe  $n$ -Ecke zerlegt, die ihrerseits in kongruente Quadrate zerlegbar sind. Somit ist das konstruierte  $n$ -Eck replizierend.

Eine Strecke mit den Endpunkten  $A$  und  $B$  wird jetzt mit  $AB$  bezeichnet. Es sei  $n \geq 6$  eine natürliche Zahl. Wenn gilt  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , zerlege man das Quadrat mit der Eckpunktmenge  $\{0, n\}^2$  durch den Polygonzug bestehend aus den Strecken  $K_1K_2, K_2K_3, \dots, K_{n-3}K_{n-2}$ , wobei der Punkt  $K_i$  die Koordinaten  $(x_i, y_i)$  mit

$$x_1 = 2$$

$$x_i = \begin{cases} x_{i-1} & \text{für } i \text{ gerade} \\ x_{i-1} + 2 & \text{für } i \text{ ungerade} \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n-2$$

und

$$y_1 = 0$$

$$y_i = \begin{cases} y_{i-1} + 2 & \text{für } i \text{ gerade, } i \neq \frac{n}{2} - 1, i \neq \frac{n}{2} + 1 \\ y_{i-1} + 3 & \text{für } i = \frac{n}{2} - 1 \text{ oder } i = \frac{n}{2} + 1 \\ y_{i-1} & \text{für } i \text{ ungerade} \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n-2$$

hat. Es entstehen zwei kongruente nichtkonvexe  $n$ -Ecke, die jeweils in  $\frac{n^2}{2}$  kongruente Quadrate zerlegbar sind. Somit sind sie  $n^2$ -replizierend. Die Abbildung 3.1 zeigt die Konstruktion für ein Sechseck und für ein Zehneck.

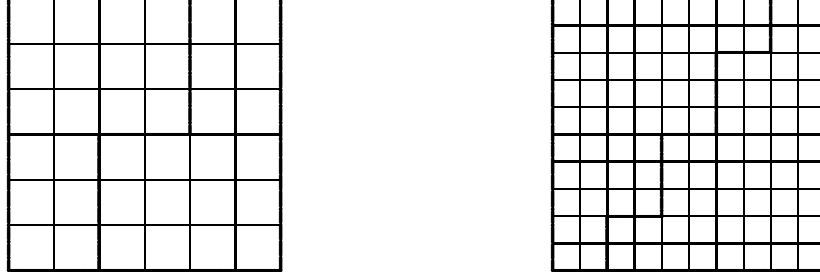


Abbildung 3.1: Replizierendes Sechseck und Zehneck

Ist  $n$  durch 4 teilbar, kann man das Quadrat mit der Eckpunktmenge  $\{0, \frac{n}{2}\}^2$  durch den Polygonzug, der bestimmt ist durch die Punkte  $K_1, \dots, K_{n-2}$ , wobei  $K_i$  die Koordinaten  $(x_i, y_i)$  mit

$$x_1 = 1$$

$$x_i = \begin{cases} x_{i-1} & \text{für } i \text{ gerade} \\ x_{i-1} + 1 & \text{für } i \text{ ungerade} \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n-2$$

und

$$y_1 = 0$$

$$y_i = \begin{cases} y_{i-1} + 1 & \text{für } i \text{ gerade, } i \neq \frac{n}{2} \\ y_{i-1} + 2 & \text{für } i = \frac{n}{2} \\ y_{i-1} & \text{für } i \text{ ungerade} \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n-2$$

hat, in zwei kongruente nichtkonvexe  $n$ -Ecke zerlegen. Diese  $n$ -Ecke sind in  $\frac{n^2}{8}$  kongruente Quadrate zerlegbar. Folglich sind sie replizierend. Für  $n = 8$  und für  $n = 12$  illustriert die Abbildung 3.2 die Konstruktion.

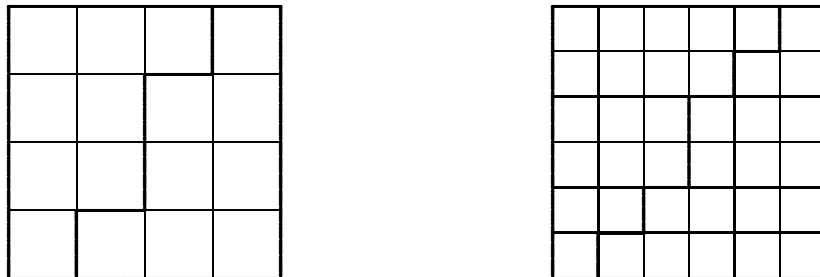


Abbildung 3.2: Replizierendes 8-Eck und 12-Eck

Es ist (bis auf Ähnlichkeit) nur ein selbstähnliches nichtkonvexes  $n$ -Eck mit ungeradem  $n$  bekannt. Die sogenannte *Sphinx* [11] ist ein nichtkonvexes Fünfeck, das aus

sechs untereinander kongruenten gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist. Eine 4-replizierende Zerlegung dieses Fünfecks zeigt die Abbildung 3.3.

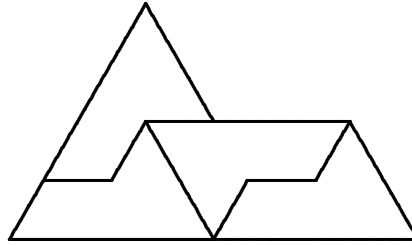


Abbildung 3.3: 4-replizierende Zerlegung der Sphinx

## Kapitel 4

# Selbstähnlichkeit $d$ -dimensionaler konvexer Polyeder

In diesem Kapitel sei  $d$  stets eine natürliche Zahl größer als 1. Im Folgenden werden  $d$ -Polytope hinsichtlich Selbstähnlichkeit untersucht. Es wird eine notwendige Bedingung für die Selbstähnlichkeit von  $d$ -Polytopen bewiesen, und es wird gezeigt, wie man aus replizierenden konvexen Polyedern replizierende konvexe Polyeder höherer Dimension konstruieren kann. Außerdem werden Klassen replizierender  $d$ -Polytope vorgestellt. Ferner werden zwei Spezialfälle untersucht: Zum einen werden  $k$ -replizierende  $d$ -dimensionale Quader für alle natürlichen Zahlen  $k \geq 2$  bestimmt und zum anderen 2-replizierende  $d$ -Polytope.

Wie im Kapitel 1 eingeführt, wird hier mit  $\langle p_0; a_1, \dots, a_d \rangle$  ein  $d$ -dimensionales Simplex mit ausgezeichneter Ecke  $p_0$  und erzeugenden Kantenvektoren  $a_1, \dots, a_d$  bezeichnet, mit  $X \otimes Y$  die Minkowskisumme zweier Mengen  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ . Außerdem sei  $A \times B$  das kartesische Produkt zweier Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ . Im Folgenden wird der  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  mit dem  $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$  identifiziert. Zwischen dem kartesischen Produkt und der Minkowskisumme gibt es einen Zusammenhang. Seien  $A \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ . Mit den Definitionen  $\overline{A} := \{(a_1, \dots, a_{d_1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{d_1+d_2} : (a_1, \dots, a_{d_1}) \in A\}$  und  $\overline{B} := \{(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_{d_2}) \in \mathbb{R}^{d_1+d_2} : (b_1, \dots, b_{d_2}) \in B\}$  gilt  $A \times B = \overline{A} \otimes \overline{B}$ . Das kartesische Produkt zweier konvexer Polyeder ist also ebenfalls ein konvexes Polyeder. Ferner ist das kartesische Produkt bzgl. der Verknüpfung  $+$ , d. h. der Zerlegung von Mengen, distributiv.

### 4.1 Eine notwendige Bedingung für die Selbstähnlichkeit

Für ein  $d$ -Polytop  $P$  bezeichne  $V_d(P)$  das Volumen. Außerdem sei  $\mathfrak{F}_{d-2}(P)$  die Menge der  $(d-2)$ -dimensionalen Seiten von  $P$ . Ist  $e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)$ , dann ist der *Keilwinkel* von  $P$  an  $e$  der Winkel zwischen den Seitenflächen von  $P$ , deren Durchschnitt die  $(d-2)$ -dimensionale Seite  $e$  ist. Die Menge aller Keilwinkelgrößen  $\alpha(e)$  eines  $d$ -Polytops  $P$



an den  $(d - 2)$ -dimensionalen Seiten  $e$  von  $P$  wird mit  $M_P$  bezeichnet.

**Definition 4.1.** Sei  $P$  ein  $d$ -Polytop. Ferner sei  $V(M)$  der von einer endlichen Menge  $M$  mit  $M_P \cup \{\pi\} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$  erzeugte Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  und  $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  eine  $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung mit  $f(\pi) = 0$ . Dann heißt die reelle Zahl

$$D_f(P) := \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} V_{d-2}(e) f(\alpha(e))$$

Dehn-Invariante des  $d$ -Polytops  $P$  (bzgl.  $f$ ).

Es werden folgende Eigenschaften der Dehn-Invarianten benötigt:

**Lemma 4.1.** Für zwei  $d$ -Polytope  $P$  und  $Q$  mit  $P \cong \lambda Q$ ,  $\lambda > 0$ , gilt

$$D_f(P) = \lambda^{d-2} D_f(Q)$$

für alle  $\mathbb{Q}$ -linearen Abbildungen  $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $f(\pi) = 0$ , wobei  $V(M)$  der von einer endlichen Menge  $M$  mit  $M_P \cup \{\pi\} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$  erzeugte Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  ist.

**Beweis.** Seien  $P$  und  $Q$   $d$ -Polytope mit  $P \cong \lambda Q$  für  $\lambda > 0$ . Dann gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung  $\phi$  mit dem Ähnlichkeitsfaktor  $\lambda$ , so daß  $\phi(Q) = P$  ist. Das Volumen einer  $(d - 2)$ -dimensionalen Seite  $e \in \mathfrak{F}_{d-2}(Q)$  und der  $(d - 2)$ -dimensionalen Seite  $\phi(e) \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)$  unterscheidet sich um den Faktor  $\lambda^{d-2}$ , d. h.  $V_{d-2}(\phi(e)) = \lambda^{d-2} V_{d-2}(e)$ . Die Keilwinkelgrößen  $\alpha(e)$  und  $\alpha(\phi(e))$  der  $d$ -Polytope  $Q$  und  $P$  an diesen Seiten stimmen überein. Somit gilt für alle  $\mathbb{Q}$ -linearen Abbildungen  $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $f(\pi) = 0$ , wobei  $V(M)$  der von einer endlichen Menge  $M$  mit  $M_P \cup \{\pi\} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$  erzeugte Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  ist,  $D_f(P) = \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} V_{d-2}(e) f(\alpha(e)) = \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(Q)} V_{d-2}(\phi(e)) f(\alpha(\phi(e))) = \lambda^{d-2} D_f(Q)$ .  $\square$

**Lemma 4.2.** Ein  $d$ -Polytop  $P$  sei in die  $d$ -Polytope  $P_1, \dots, P_k$  zerlegt. Dann gilt

$$D_f(P) = D_f(P_1) + \dots + D_f(P_k)$$

für alle  $\mathbb{Q}$ -linearen Abbildungen  $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $f(\pi) = 0$ , wobei  $V(M)$  der von einer endlichen Menge  $M$  mit  $M_P \cup M_{P_1} \cup \dots \cup M_{P_k} \cup \{\pi\} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$  erzeugte Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  ist.

**Beweis.** Seien  $P, P_1, \dots, P_k$   $d$ -Polytope mit  $P = P_1 + \dots + P_k$ . Außerdem sei  $M$  eine endliche Menge mit  $M_P \cup M_{P_1} \cup \dots \cup M_{P_k} \cup \{\pi\} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $V(M)$  der von  $M$  erzeugte Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  und  $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  eine  $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung mit  $f(\pi) = 0$ .

Zum Beweis des Lemmas wird eine  $(d - 2)$ -dimensionale Seite  $e' \in \mathfrak{F}_{d-2}(P_1) \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{d-2}(P_k)$  betrachtet. Wenn es eine  $(d - 2)$ -dimensionale Seite  $e$  von  $P$  gibt, für die  $e' \subseteq e$  gilt, summieren sich die Keilwinkelgrößen der  $d$ -Polytope  $P_i$  an  $e'$  zu  $\alpha(e)$ . Gibt es eine solche Seite  $e$  von  $P$  nicht, liegt  $e'$  im relativen Inneren einer Seitenfläche

von  $P$  oder im Inneren von  $P$ . In diesem Fall summieren sich die Keilwinkelgrößen der  $d$ -Polytope  $P_i$  an  $e'$  zu  $\pi$  oder zu  $2\pi$ . Da  $V_{d-2}$  einfach additiv und  $f$  eine lineare Abbildung mit  $f(\pi) = f(2\pi) = 0$  ist, folgt daraus  $D_f(P) = D_f(P_1) + \cdots + D_f(P_k)$ .  $\square$

**Satz 4.3.** *Ist ein  $d$ -Polytop selbstähnlich, so sind alle seine Dehn-Invarianten gleich Null.*

**Beweis.** Sei  $P$  ein  $k$ -selbstähnliches  $d$ -Polytop und  $P_1 + \cdots + P_k$  eine  $k$ -selbstähnliche Zerlegung von  $P$ . Desweiteren sei  $V(M)$  der von einer endlichen Menge  $M$  mit  $M_P \cup \{\pi\} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$  erzeugte Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  und  $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  eine beliebige  $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung mit  $f(\pi) = 0$ .

Nach Lemma 4.2 gilt  $D_f(P) = D_f(P_1) + \cdots + D_f(P_k)$ . Da  $P_1 + \cdots + P_k$  eine  $k$ -selbstähnliche Zerlegung des  $d$ -Polytops  $P$  ist, gibt es reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  mit  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ , so daß gilt  $P_i \cong \lambda_i^{1/d} P$  für  $i = 1, \dots, k$  (vgl. Lemma 1.1). Für die Dehn-Invariante von  $P$  gilt somit nach Lemma 4.1

$$D_f(P) = D_f(P_1) + \cdots + D_f(P_k) = \left( \lambda_1^{\frac{d-2}{d}} + \cdots + \lambda_k^{\frac{d-2}{d}} \right) D_f(P).$$

Daraus folgt  $D_f(P) = 0$ . Denn wegen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  und  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$  gilt  $\lambda_1^{\frac{d-2}{d}} + \cdots + \lambda_k^{\frac{d-2}{d}} > \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ .  $\square$

## 4.2 Konstruktionen replizierender $d$ -Polytope

Konstruktionsvorschriften, mit denen man replizierende Polyeder aus replizierenden Polyedern niedrigerer Dimension erzeugen kann, liefern die Sätze 4.4 und 4.5. Beim Beweis dieser beiden Sätze wird verwendet, daß für zwei kongruente konvexe Polyeder  $P, \overline{P} \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$  und zwei kongruente konvexe Polyeder  $Q, \overline{Q} \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$  die konvexen Polyeder  $P \times Q$  und  $\overline{P} \times \overline{Q}$  ebenfalls kongruent sind.

**Satz 4.4.** *Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$  ein  $k^n$ -replizierendes  $d_1$ -Polytop und  $Q \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$  ein  $k^m$ -replizierendes  $d_2$ -Polytop. Außerdem gelte  $nd_2 = md_1$ . Dann ist  $P \times Q$  ein  $k^{n+m}$ -replizierendes  $(d_1 + d_2)$ -Polytop.*

**Beweis.** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$  ein  $d_1$ -Polytop und  $Q \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$  ein  $d_2$ -Polytop. Das Polyeder  $P$  sei  $k^n$ -replizierend, d. h.  $P = P_1 + \cdots + P_{k^n}$  mit  $P_i \cong P_1 \sim P$ ,  $i = 2, \dots, k^n$ , und das Polyeder  $Q$  sei  $k^m$ -replizierend mit  $m := n \frac{d_2}{d_1} \in \mathbb{N}$ , d. h.  $Q = Q_1 + \cdots + Q_{k^m}$  mit  $Q_j \cong Q_1 \sim Q$ ,  $j = 2, \dots, k^m$ .

Nach Lemma 1.2 gilt dann  $P \cong k^{n/d_1} P_i$  für  $i = 1, \dots, k^n$  und  $Q \cong k^{m/d_2} Q_j = k^{n/d_1} Q_j$  für  $j = 1, \dots, k^m$ . Somit ist das  $(d_1 + d_2)$ -Polytop  $P \times Q$  kongruent zu  $k^{n/d_1} (P_i \times Q_j)$  für  $i = 1, \dots, k^n$ ,  $j = 1, \dots, k^m$ . Weiterhin gilt

$$P \times Q = \sum_{i=1}^{k^n} P_i \times \sum_{j=1}^{k^m} Q_j = \sum_{i=1}^{k^n} \sum_{j=1}^{k^m} (P_i \times Q_j).$$

Folglich ist  $\sum_{i=1}^{k^n} \sum_{j=1}^{k^m} (P_i \times Q_j)$  eine  $k^{n+m}$ -replizierende Zerlegung von  $P \times Q$ .  $\square$

Eine weitere Möglichkeit, replizierende Polyeder zu gewinnen, liefert der nächste Satz.

**Satz 4.5.** *Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  ein  $k$ -replizierendes  $d$ -Polytop. Dann ist das  $(nd)$ -Polytop*

$$P \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times k^{-\frac{2}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P$$

*ebenfalls  $k$ -replizierend.*

**Beweis.** Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -Polytop. Das Polyeder  $P$  sei  $k$ -replizierend, d.h. es gibt eine Zerlegung  $P = P_1 + \dots + P_k$  von  $P$  mit  $P_i \cong k^{-1/d} P$ ,  $i = 1, \dots, k$  (vgl. Lemma 1.2). Für das  $(nd)$ -Polytop  $Q := P \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times k^{-\frac{2}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P$  ergibt sich aus der  $k$ -replizierenden Zerlegung von  $P$

$$\begin{aligned} Q &= (P_1 + \dots + P_k) \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P \\ &= (P_1 \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P) + \dots + (P_k \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P). \end{aligned}$$

Sei  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Wegen  $P_i \cong k^{-1/d} P$  ist das  $(nd)$ -Polytop  $P_i \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P$  kongruent zu  $k^{-\frac{n}{nd}} P \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P$ . Da Koordinatenvertauschungen Bewegungen sind, gilt demzufolge

$$P_i \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P \cong k^{-\frac{1}{nd}} (P \times k^{-\frac{1}{nd}} P \times \dots \times k^{-\frac{n-1}{nd}} P) = k^{-\frac{1}{nd}} Q.$$

Das  $(nd)$ -Polytop  $Q$  ist also in  $k$  kongruente zu  $Q$  ähnliche Polyeder zerlegbar, d.h.  $Q$  ist ebenfalls  $k$ -replizierend.  $\square$

Mit Hilfe von Satz 4.5 ist es beispielsweise möglich, aus einem gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck 2-replizierende  $(2d)$ -Polytope zu konstruieren, die keine Paralleletope sind.

### 4.3 Klassen replizierender $d$ -Polytope

Klassen replizierender  $d$ -Polytope kann man unter Ausnutzung der Sätze 4.4 und 4.5 bestimmen. Eine erste weitere Klasse replizierender  $d$ -Polytope sind die  $d$ -Paralleletope. Jedes  $d$ -Parallelotop ist  $k^d$ -replizierend für alle  $k \geq 2$ . Man erhält eine  $k^d$ -replizierende Zerlegung eines  $d$ -Parallelelots  $P$ , indem man jede Kante von  $P$  in  $k$  Strecken gleicher Länge zerlegt und  $P$  mittels der Hyperebenen, die Endpunkte dieser Strecken enthalten und parallel zu den Seitenflächen von  $P$  sind, zerschneidet.

**Definition 4.2.** a) Eine Menge  $\{a_1, \dots, a_d\}$  von  $d$  Vektoren des  $\mathbb{R}^d$  heißt *H-System*, wenn reelle Zahlen  $\gamma$  und  $\omega$  mit  $\gamma > 0$ ,  $\frac{1}{1-d} < \omega < 1$  existieren, so daß gilt

$$a_i a_k = \begin{cases} \gamma^2 \omega & \text{für } i \neq k \\ \gamma^2 & \text{für } i = k \end{cases},$$

also  $|a_i| = \gamma$  für  $i = 1, \dots, d$  und  $\cos(\angle(a_i, a_k)) = \omega$  für  $1 \leq i < k \leq d$ .

b) Sei  $\{a_1, \dots, a_d\}$  eine Menge linear unabhängiger Vektoren des  $\mathbb{R}^d$  und  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  $i \leq d$ . Dann heißt jedes Polyeder  $P$ , das zu

$$W_i := \langle 0; a_1, \dots, a_i \rangle \otimes \langle 0; a_{i+1}, \dots, a_d \rangle$$

kongruent ist, *Simplotop vom Typ  $i$* . Ist  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System, so heißt  $P$  genauer  *$H$ -Simplotop vom Typ  $i$* .

Wenn  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System ist, so sind die Vektoren  $a_1, \dots, a_d$  linear unabhängig. Zum Beweis dieser Aussage wird die Linearkombination  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_d a_d = 0$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$  betrachtet. Da  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System ist, gilt  $0 = \lambda_1 a_1 a_j + \dots + \lambda_d a_d a_j = \lambda_1 \gamma^2 \omega + \dots + \lambda_{j-1} \gamma^2 \omega + \lambda_j \gamma^2 + \lambda_{j+1} \gamma^2 \omega + \dots + \lambda_d \gamma^2 \omega$  mit  $\gamma > 0$  und  $\frac{1}{1-d} < \omega < 1$  für  $j = 1, \dots, d$ . Es ergibt sich ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Variablen  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  und folgender Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & \dots & \omega \\ \omega & 1 & \omega & \dots & \omega \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega & \dots & \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $\frac{1}{1-d} < \omega < 1$  hat diese Matrix vollen Rang, d. h. das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Somit gilt  $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0$ . Folglich sind die Vektoren  $a_1, \dots, a_d$  linear unabhängig.

E. Hertel hat in [16] gezeigt, daß  $H$ -Simplotope replizierend sind. Hier wird für die Konstruktion weiterer replizierender Polyeder eine Beschreibung einer  $k^d$ -replizierenden Zerlegung eines  $d$ -dimensionalen  $H$ -Simplexes, d. h. eines  $H$ -Simplotops vom Typ 0 bzw.  $d$ , benötigt. Beim Beweis werden folgende Aussagen verwendet:

**Lemma 4.6.** *Sei  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System und  $\pi \in \mathfrak{S}_d$  eine Permutation der Indexmenge  $\{1, \dots, d\}$ . Ferner seien für ein  $n \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen  $l_1, \dots, l_n$  mit  $1 < l_1 < \dots < l_n = d$  gegeben. Dann ist das  $d$ -Polytop*

$$Z_{l_1, \dots, l_n} := \langle 0; a_1, \dots, a_{l_1} \rangle \otimes \langle 0; a_{l_1+1}, \dots, a_{l_2} \rangle \otimes \dots \otimes \langle 0; a_{l_{n-1}+1}, \dots, a_{l_n} \rangle$$

*kongruent zum  $d$ -Polytop*

$$Z_{l_1, \dots, l_n}(\pi) := \langle 0; a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(l_1)} \rangle \otimes \langle 0; a_{\pi(l_1+1)}, \dots, a_{\pi(l_2)} \rangle \otimes \dots \otimes \langle 0; a_{\pi(l_{n-1}+1)}, \dots, a_{\pi(l_n)} \rangle.$$

**Beweis.** Seien  $n, l_1, \dots, l_n$  und  $Z_{l_1, \dots, l_n}$  wie im Lemma definiert. Es genügt zu zeigen, daß die Behauptung für eine beliebige Transposition der Menge  $\{1, \dots, d\}$  richtig ist. Sei also  $(j, m)$  eine Transposition von  $\{1, \dots, d\}$ . Ferner sei  $\varepsilon$  die Hyperebene durch 0 senkrecht zu  $a_m - a_j$ . Dann gilt für die Spiegelung  $\sigma$  an der Hyperebene  $\varepsilon$

$$\sigma(Z_{l_1, \dots, l_n}) = Z_{l_1, \dots, l_n}((j, m)).$$

Denn da  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System ist, gilt für alle  $i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{j, m\}$  die Beziehung  $a_i(a_m - a_j) = a_i a_m - a_i a_j = 0$ . Also ist  $\{a_1, \dots, a_d\} \setminus \{a_j, a_m\} \subseteq \varepsilon$ . Demnach gilt  $\sigma(a_i) = a_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{j, m\}$ . Außerdem ist  $\sigma(a_j) = a_m$  und  $\sigma(a_m) = a_j$ .  $\square$

**Lemma 4.7.** (*Kanonische Simplexzerlegung*) Sei  $S := \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  ein  $d$ -dimensionales Simplex und  $\lambda$  eine reelle Zahl mit  $0 < \lambda < 1$ . Das Simplex  $S$  kann in  $d+1$  Simplotope  $W_0(\lambda), \dots, W_d(\lambda)$  zerlegt werden, wobei die Simplotope  $W_i(\lambda)$  wie folgt definiert sind

$$W_0(\lambda) := \lambda \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle,$$

$$W_i(\lambda) := (1 - \lambda) \langle 0; a_1, \dots, a_i \rangle \otimes \lambda \langle a_1 + \dots + a_i; a_{i+1}, \dots, a_d \rangle \text{ für } i = 1, \dots, d-1,$$

$$W_d(\lambda) := (1 - \lambda) \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle \otimes \lambda \langle a_1 + \dots + a_d \rangle.$$

Einen Beweis des Lemmas findet man in [13]. Die Abbildung 4.1 illustriert die kanonische Simplexzerlegung eines Dreiecks und eines Tetraeders für  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

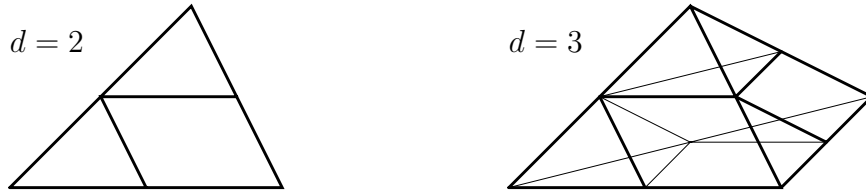


Abbildung 4.1: Kanonische Simplexzerlegung mit  $\lambda = \frac{1}{2}$

**Lemma 4.8.** (*Kanonische Simplotopzerlegung*) Jedes  $d$ -dimensionale Simplotop  $W_i := \langle 0; a_1, \dots, a_i \rangle \otimes \langle 0; a_{i+1}, \dots, a_d \rangle$  vom Typ  $i$  ( $0 \leq i \leq d$ ) kann in  $k := \binom{d}{i}$  Simplexe  $\langle 0; a_{\pi_1(1)}, \dots, a_{\pi_1(i)} \rangle, \dots, \langle 0; a_{\pi_k(1)}, \dots, a_{\pi_k(i)} \rangle$  zerlegt werden, wobei  $\pi_1, \dots, \pi_k$  genau die Permutationen der Menge  $\{1, \dots, d\}$  sind, für die  $\pi_l(1) < \dots < \pi_l(i)$  und  $\pi_l(i+1) < \dots < \pi_l(d)$  gilt.

Dieses Lemma wird in [16] bewiesen. Für ein Parallelogramm und für ein dreiseitiges Prisma, d. h. für Simplotope vom Typ 1, zeigt die Abbildung 4.2 die kanonische Simplotopzerlegung.

**Satz 4.9.** Jedes  $d$ -dimensionale  $H$ -Simplex  $S = \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  ist für alle natürlichen Zahlen  $k \geq 2$  stets  $k^d$ -replizierend. Genauer gilt, daß das  $H$ -Simplex  $S$  eine  $k^d$ -replizierende Zerlegung  $S = S_1 + \dots + S_{k^d}$  besitzt mit

$$S_i = \frac{1}{k} \langle n_{i,1} a_1 + \dots + n_{i,d} a_d; a_{\pi_i(1)}, \dots, a_{\pi_i(d)} \rangle \text{ für } i = 1, \dots, k^d.$$

Dabei ist  $\pi_i$  für  $i \in \{1, \dots, k^d\}$  eine Permutation der Indexmenge  $\{1, \dots, d\}$ , und für die Zahlen  $n_{i,1}, \dots, n_{i,d}$  gilt  $n_{i,1}, \dots, n_{i,d} \in \mathbb{N}_0$  und  $k-1 \geq n_{i,1} \geq \dots \geq n_{i,d} \geq 0$ .

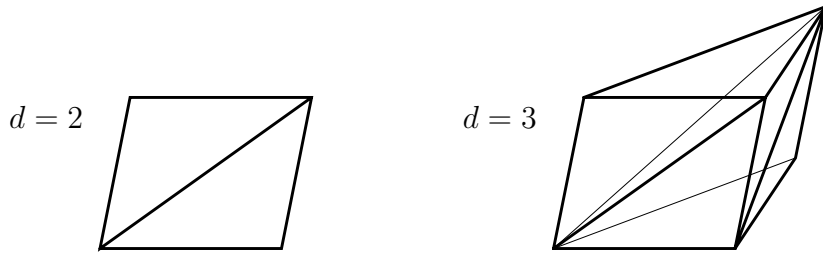


Abbildung 4.2: Kanonische Simplotopzerlegung von Simplotopen vom Typ 1

**Beweis.** Der Beweis des Satzes erfolgt durch vollständige Induktion nach  $k$  unter Verwendung von Lemma 4.6, Lemma 4.7 und Lemma 4.8. Sei zunächst  $k = 2$ . Desweiteren sei  $S = \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  ein  $d$ -dimensionales  $H$ -Simplex. Nach Lemma 4.7 läßt sich  $S$  in  $d + 1$  Simplotope  $W_i(\frac{1}{2})$  mit

$$W_i(\frac{1}{2}) := \frac{1}{2} \langle 0; a_1, \dots, a_i \rangle \otimes \frac{1}{2} \langle a_1 + \dots + a_i; a_{i+1}, \dots, a_d \rangle \text{ für } i = 0, \dots, d$$

zerlegen. Nach Lemma 4.8 kann für jedes  $i \in \{0, \dots, d\}$  das Simplotop  $W_i(\frac{1}{2})$  so in  $\binom{d}{i}$  Simplexe zerlegt werden, daß sich insgesamt eine Zerlegung von  $S$  in  $\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} = 2^d$  Simplexe ergibt:

$$S = \sum_{i=0}^d \sum_{\substack{\pi_l \in \mathfrak{S}_d \text{ mit} \\ \pi_l(1) < \dots < \pi_l(i), \\ \pi_l(i+1) < \dots < \pi_l(d)}} \frac{1}{2} \langle a_1 + \dots + a_i; a_{\pi_l(1)}, \dots, a_{\pi_l(d)} \rangle. \quad (4.1)$$

Jedes Zerlegungssimplex der Zerlegung (4.1) ist nach Lemma 4.6 kongruent zu  $\frac{1}{2} S$ . Das  $H$ -Simplex  $S$  ist also  $2^d$ -replizierend, und es existiert eine Zerlegung der im Satz angegebenen Gestalt.

Unter der Voraussetzung, die Behauptung sei für eine Zahl  $k \geq 2$  richtig, soll jetzt gezeigt werden, daß sie dann auch für  $k + 1$  gilt. Dazu sei  $S = \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  wieder ein  $d$ -dimensionales  $H$ -Simplex. Mit  $\lambda := \frac{k}{k+1}$  ergibt sich nach Lemma 4.7 für  $S$  folgende Zerlegung

$$\begin{aligned} S &= \frac{k}{k+1} \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} \left( \frac{1}{k+1} \langle 0; a_1, \dots, a_i \rangle \otimes \frac{k}{k+1} \langle a_1 + \dots + a_i; a_{i+1}, \dots, a_d \rangle \right) \\ &+ \frac{1}{k+1} \langle k(a_1 + \dots + a_d); a_1, \dots, a_d \rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Das  $H$ -Simplex  $\frac{k}{k+1} \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  und die  $H$ -Simplotope vom Typ  $i = 1, \dots, d - 1$  dieser Zerlegung von  $S$  können geeignet weiter zerlegt werden. Das  $H$ -Simplex  $\frac{k}{k+1} \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  läßt sich nach Induktionsvoraussetzung in  $k^d$  zu  $\frac{1}{k+1} S$  kongruente Simplexe zerlegen, die jeweils die (nicht geordneten) erzeugenden Kantenvektoren  $\frac{1}{k+1} a_1, \dots, \frac{1}{k+1} a_d$  und eine ausgezeichnete Ecke der Form  $\frac{1}{k+1} (n_1 a_1 + \dots + n_d a_d)$  mit

$n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}_0$ ,  $k-1 \geq n_1 \geq \dots \geq n_d \geq 0$  haben. Sei  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ . Für das  $H$ -Simplex

$$W_i\left(\frac{k}{k+1}\right) := \frac{1}{k+1} \langle 0; a_1, \dots, a_i \rangle \otimes \frac{k}{k+1} \langle a_1 + \dots + a_i; a_{i+1}, \dots, a_d \rangle \quad (4.3)$$

vom Typ  $i$  gilt: Das  $(d-i)$ -dimensionale  $H$ -Simplex  $\frac{k}{k+1} \langle a_1 + \dots + a_i; a_{i+1}, \dots, a_d \rangle$  kann nach Induktionsvoraussetzung in  $k^{d-i}$  Simplexe mit erzeugenden Kantenvektoren  $\frac{1}{k+1} a_{i+1}, \dots, \frac{1}{k+1} a_d$  und ausgezeichneter Ecke der Form  $\frac{k}{k+1}(a_1 + \dots + a_i) + \frac{1}{k+1}(n_{i+1}a_{i+1} + \dots + n_d a_d)$  mit  $n_{i+1}, \dots, n_d \in \mathbb{N}_0$ ,  $k-1 \geq n_{i+1} \geq \dots \geq n_d \geq 0$  zerlegt werden. Da die Minkowskisumme bzgl. der Verknüpfung  $+$  distributiv ist, gibt es somit eine Zerlegung des  $H$ -Simplextops  $W_i(\frac{k}{k+1})$  in  $k^{d-i}$   $H$ -Simplexotope der Form

$$\frac{1}{k+1} \langle 0; a_1, \dots, a_i \rangle \otimes \frac{1}{k+1} \langle n_1 a_1 + \dots + n_d a_d; a_{\pi(i+1)}, \dots, a_{\pi(d)} \rangle. \quad (4.4)$$

Dabei ist  $\pi$  jeweils eine Permutation der Menge  $\{i+1, \dots, d\}$  und  $n_1, \dots, n_d$  sind jeweils Zahlen mit  $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \geq n_1 \geq \dots \geq n_d \geq 0$ . Jedes  $H$ -Simplex der Gestalt (4.4) ist nach Lemma 4.8 in  $\binom{d}{i}$  Simplexe zerlegbar, die die erzeugenden Kantenvektoren  $\frac{1}{k+1} a_1, \dots, \frac{1}{k+1} a_d$  haben und eine ausgezeichnete Ecke der Form  $\frac{1}{k+1}(n_1 a_1 + \dots + n_d a_d)$  mit Zahlen  $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}_0$ , für die  $k \geq n_1 \geq \dots \geq n_d \geq 0$  gilt.

Insgesamt ergibt sich für das  $H$ -Simplex  $S$  eine Zerlegung in  $k^d + \sum_{i=1}^{d-1} k^{d-i} \binom{d}{i} + 1 = (k+1)^d$  Simplexe, die alle die Form

$$\frac{1}{k+1} \langle n_1 a_1 + \dots + n_d a_d; a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(d)} \rangle$$

haben. Dabei ist  $\pi$  jeweils eine Permutation der Menge  $\{1, \dots, d\}$ , und  $n_1, \dots, n_d$  sind jeweils Zahlen mit  $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}_0$  und  $k \geq n_1 \geq \dots \geq n_d \geq 0$ . Nach Lemma 4.6 sind die  $(k+1)^d$  Zerlegungssimplexe paarweise kongruent und ähnlich zum  $H$ -Simplex  $S$ . Somit ist  $S$  also  $(k+1)^d$ -replizierend, und es existiert eine Zerlegung der im Satz angegebenen Gestalt.  $\square$

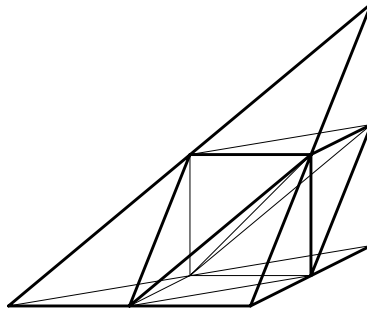


Abbildung 4.3:  $2^3$ -replizierende Zerlegung eines dreidimensionalen  $H$ -Simplexes

Die Bedingung, erzeugende Kantenvektoren des Simplexes bilden ein  $H$ -System, wurde beim Beweis von Satz 4.9 verwendet, um zu zeigen, daß die Zerlegungssimplexe paarweise kongruent und ähnlich zum Ausgangssimplex sind. Für  $d = 2$  ist

diese Bedingung nicht notwendig: Jedes Dreieck ist  $k^2$ -replizierend für alle  $k \geq 2$ . Für  $d = 3$  folgt aus einem Satz von E. Hertel [14]: Ist die Zerlegung eines dreidimensionalen Simplexes  $S$ , die man mittels kanonischer Simplexzerlegung und kanonischer Simplotopzerlegung erhält,  $2^3$ -replizierend, so ist  $S$  ein  $H$ -Simplex. Damit kann für alle  $k \geq 2$  die durch den Beweis rekursiv gegebene Zerlegung eines dreidimensionalen Simplexes  $S$  in  $k^3$  Simplexe nur dann replizierend sein, wenn  $S$  ein  $H$ -Simplex ist. Denn bei der Konstruktion der Zerlegung von  $S$  in  $3^3$  Simplexe wird das Simplex  $\frac{2}{3}S$  gemäß (4.1) in  $2^3$  Simplexe zerlegt; bei der Konstruktion der Zerlegung in  $4^3$  Simplexe wird das Simplex  $\frac{3}{4}S$  in  $3^3$  Simplexe zerlegt, dazu wird u. a. das Simplex  $\frac{2}{3}(\frac{3}{4}S)$  gemäß (4.1) in  $2^3$  Simplexe zerlegt; usw. Bei der Konstruktion der Zerlegung von  $S$  in  $k^3$  Simplexe wird also das Simplex  $\frac{2}{k}S$  gemäß (4.1) in  $2^3$  Simplexe zerlegt. Wenn die durch den Beweis gegebene Zerlegung von  $S$  in  $k^3$  Simplexe replizierend ist, müssen die Simplexe der Zerlegung von  $\frac{2}{k}S$  gemäß (4.1) paarweise kongruent und ähnlich zu  $S$  sein, d. h. die Zerlegung von  $\frac{2}{k}S$  in  $2^3$  Simplexe, die man mittels kanonischer Simplexzerlegung und kanonischer Simplotopzerlegung erhält, muß replizierend sein. Folglich muß  $S$  ein  $H$ -Simplex sein.

Mit Hilfe der  $H$ -Simplexe lassen sich weitere replizierende  $d$ -Polytope konstruieren:

**Folgerung 4.10.** *Sei  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System. Ferner seien für ein  $n \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen  $l_1, \dots, l_n$  mit  $1 < l_1 < \dots < l_n = d$  gegeben. Dann ist das  $d$ -Polytop*

$$Z_{l_1, \dots, l_n} := \langle 0; a_1, \dots, a_{l_1} \rangle \otimes \langle 0; a_{l_1+1}, \dots, a_{l_2} \rangle \otimes \dots \otimes \langle 0; a_{l_{n-1}+1}, \dots, a_{l_n} \rangle$$

für alle natürlichen Zahlen  $k \geq 2$  stets  $k^d$ -replizierend.

**Beweis.** Seien  $\{a_1, \dots, a_d\}$  und  $n, l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}$  wie in der Folgerung definiert. Außerdem sei  $k \geq 2$  eine natürliche Zahl. Desweiteren wird  $l_0 := 0$  gesetzt.

Dann sind die Polyeder  $\langle 0; a_{l_0+1}, \dots, a_{l_1} \rangle, \langle 0; a_{l_1+1}, \dots, a_{l_2} \rangle, \dots, \langle 0; a_{l_{n-1}+1}, \dots, a_{l_n} \rangle$   $H$ -Simplexe. Für  $j \in \{1, \dots, n\}$  besitzt das  $(l_j - l_{j-1})$ -dimensionale  $H$ -Simplex  $\langle 0; a_{l_{j-1}+1}, \dots, a_{l_j} \rangle$  nach Satz 4.9 eine  $k^{l_j - l_{j-1}}$ -replizierende Zerlegung, wobei die Zerlegungspolyeder Simplexe mit den erzeugenden Kantenvektoren  $\frac{1}{k}a_{l_{j-1}+1}, \dots, \frac{1}{k}a_{l_j}$  sind. Unter Berücksichtigung der Distributivität der Minkowskisumme bzgl. der Verknüpfung  $+$  folgt daraus, daß das  $d$ -Polytop  $Z_{l_1, \dots, l_n} := \langle 0; a_{l_0+1}, \dots, a_{l_1} \rangle \otimes \dots \otimes \langle 0; a_{l_{n-1}+1}, \dots, a_{l_n} \rangle$  in  $k^{l_1 - l_0} \dots k^{l_n - l_{n-1}} = k^{l_n - l_0} = k^d$   $d$ -Polytope, die nach Lemma 4.6 alle zu  $\frac{1}{k}Z_{l_1, \dots, l_n}$  kongruent sind, zerlegbar ist. Das  $d$ -Polytop  $Z_{l_1, \dots, l_n}$  ist also  $k^d$ -replizierend.  $\square$

Jetzt soll eine weitere Klasse replizierender  $d$ -Polytope vorgestellt werden. Der Konstruktion dieser Polyeder liegt folgende Idee zugrunde: Man zerlege ein  $d$ -dimensionales  $H$ -Simplex so in zwei kongruente Polyeder  $P_1, P_2$ , daß für bestimmte replizierende Zerlegungen des  $H$ -Simplexes die Zerlegungssimplexe entweder Teil von  $P_1$  oder Teil von  $P_2$  sind. Die Polyeder  $P_1$  und  $P_2$  sind dann ebenfalls replizierend.



**Definition 4.3.** Ist  $d$  eine ungerade Zahl,  $p_0 \in \mathbb{R}^d$  und  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System des  $\mathbb{R}^d$ , so heißt jedes zu

$$K(p_0; a_1, \dots, a_d) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = p_0 + \sum_{i=1}^d \mu_i a_i, 1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_d \geq 0, \mu_{\frac{d+1}{2}} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

kongruente  $d$ -Polytop  $H$ -Keil.

Jeder  $H$ -Keil ist replizierend. Der Beweis dieser Aussage erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird gezeigt, daß sich für ungerade Zahlen  $d$  ein  $d$ -dimensionales  $H$ -Simplex  $S$  in zwei kongruente  $H$ -Keile zerlegen läßt. Umgekehrt sind diese  $H$ -Keile für alle geraden Zahlen  $k$  in  $\frac{k^d}{2}$  zu  $S$  ähnliche paarweise kongruente Simplexe zerlegbar.

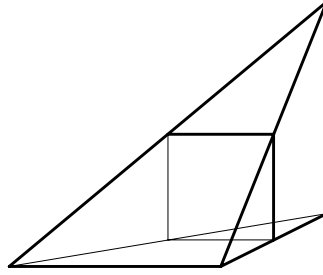


Abbildung 4.4: Zerlegung eines dreidimensionalen  $H$ -Simplexes in zwei kongruente  $H$ -Keile

**Lemma 4.11.** Sei  $d$  eine ungerade Zahl und  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System des  $\mathbb{R}^d$ . Dann kann das  $H$ -Simplex  $\langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  in den  $H$ -Keil  $K(0; a_1, \dots, a_d)$  und ein dazu kongruentes  $d$ -Polytop zerlegt werden.

**Beweis.** Sei  $d$  eine ungerade Zahl und  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System. Außerdem seien

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^d \mu_i a_i, 1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_d \geq 0, \mu_{\frac{d+1}{2}} \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$\overline{K} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^d \mu_i a_i, 1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_d \geq 0, \mu_{\frac{d+1}{2}} \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

ein  $d$ -dimensionaler  $H$ -Keil und ein  $d$ -Polytop. Dann besitzt das  $H$ -Simplex

$$S := \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^d \mu_i a_i, 1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_d \geq 0 \right\}$$

eine Zerlegung in  $K$  und  $\overline{K}$ . Denn es gilt  $S = K \cup \overline{K}$  und  $\text{int}(K \cap \overline{K}) = \emptyset$ .

Um zu beweisen, daß  $\overline{K}$  und der  $H$ -Keil  $K$  kongruent sind, wird eine Bewegung angegeben, die  $K$  auf  $\overline{K}$  abbildet. Da  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System ist, sind die Vektoren  $a_1, \dots, a_d$  linear unabhängig. Sie bilden also eine Basis des  $\mathbb{R}^d$ . Folglich existieren für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  eindeutig bestimmte reelle Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_d$  mit  $x = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_d a_d$ . Somit ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ \alpha(x) &= \alpha(\mu_1 a_1 + \dots + \mu_d a_d) := (1 - \mu_d) a_1 + \dots + (1 - \mu_1) a_d\end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Die Abbildung  $\alpha$  ist außerdem längentreu. Zum Beweis werden zwei Vektoren  $x = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_d a_d$ ,  $y = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_d a_d \in \mathbb{R}^d$  betrachtet und das Quadrat der euklidischen Norm von  $x - y$  und  $\alpha(x) - \alpha(y)$  bestimmt. Weil  $\{a_1, \dots, a_d\}$  ein  $H$ -System ist, gilt

$$\begin{aligned}|x - y|^2 &= |(\mu_1 - \lambda_1) a_1 + \dots + (\mu_d - \lambda_d) a_d|^2 \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\mu_i - \lambda_i)(\mu_j - \lambda_j) a_i a_j \\ &= \sum_{i=1}^d \left( (\mu_i - \lambda_i)^2 a_i a_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d (\mu_i - \lambda_i)(\mu_j - \lambda_j) a_i a_j \right) \\ &= a_1 a_1 \sum_{i=1}^d (\mu_i - \lambda_i)^2 + 2 a_1 a_2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=i+1}^d (\mu_i - \lambda_i)(\mu_j - \lambda_j)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|\alpha(x) - \alpha(y)|^2 &= |(\lambda_d - \mu_d) a_1 + \dots + (\lambda_1 - \mu_1) a_d|^2 \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\lambda_i - \mu_i)(\lambda_j - \mu_j) a_{d+1-i} a_{d+1-j} \\ &= a_1 a_1 \sum_{i=1}^d (\lambda_i - \mu_i)^2 + 2 a_1 a_2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=i+1}^d (\lambda_i - \mu_i)(\lambda_j - \mu_j).\end{aligned}$$

Somit ist  $|x - y| = |\alpha(x) - \alpha(y)|$ . Das bedeutet, die Abbildung  $\alpha$  ist längentreu. Folglich ist sie eine Bewegung.

Desweiteren gilt  $\alpha(K) = \overline{K}$ . Es wird zunächst  $\alpha(K) \subseteq \overline{K}$  gezeigt. Dazu sei  $x \in K$ , d. h.  $x = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_d a_d$  mit  $1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_d \geq 0$ ,  $\mu_{\frac{d+1}{2}} \leq \frac{1}{2}$ . Für das Bild von  $x$  gilt mit der Definition  $\lambda_i := 1 - \mu_{d+1-i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,

$$\alpha(x) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_d a_d.$$

Aus  $1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_d \geq 0$  folgt  $1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$  und aus  $\mu_{\frac{d+1}{2}} \leq \frac{1}{2}$  folgt  $\lambda_{\frac{d+1}{2}} \geq \frac{1}{2}$ . Insgesamt ergibt sich  $\alpha(x) \in \overline{K}$ . Da nach der Definition der Abbildung  $\alpha$

gilt  $\alpha = \alpha^{-1}$ , erhält man analog  $\alpha^{-1}(\overline{K}) \subseteq K$ , also  $\overline{K} \subseteq \alpha(K)$ . Die Abbildung  $\alpha$  leistet folglich das Gewünschte.  $\square$

**Lemma 4.12.** *Sei  $d$  eine ungerade,  $k$  eine gerade Zahl und  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$  ein  $H$ -System. Dann kann der  $d$ -dimensionale  $H$ -Keil  $K(0; a_1, \dots, a_d)$  in  $\frac{k^d}{2}$  paarweise kongruente zu  $\langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  ähnliche  $H$ -Simplexe zerlegt werden.*

**Beweis.** Sei  $d$  eine ungerade Zahl und  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$  ein  $H$ -System. Nach Lemma 4.11 läßt sich das  $H$ -Simplex  $S := \langle 0; a_1, \dots, a_d \rangle$  in den  $d$ -dimensionalen  $H$ -Keil  $K := K(0; a_1, \dots, a_d)$  und einen zu  $K$  kongruenten  $H$ -Keil  $\overline{K}$  zerlegen. Ferner besitzt nach Satz 4.9 das  $H$ -Simplex  $S$  für alle natürlichen Zahlen  $k \geq 2$  eine  $k^d$ -replizierende Zerlegung mit Zerlegungssimplex  $S_1, \dots, S_{k^d}$  der Gestalt

$$\frac{1}{k} \langle n_1 a_1 + \dots + n_d a_d; a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(d)} \rangle.$$

Dabei ist  $\pi$  jeweils eine Permutation der Indexmenge  $\{1, \dots, d\}$ , und es gilt jeweils  $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}_0$  mit  $k - 1 \geq n_1 \geq \dots \geq n_d \geq 0$ .

Sei nun  $k$  eine gerade Zahl. Wenn für ein Zerlegungssimplex  $S_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k^d\}$ , der  $k^d$ -replizierenden Zerlegung von  $S$

$$n_{\frac{d+1}{2}} \leq \frac{k}{2} - 1$$

erfüllt ist, dann gilt  $S_i \subseteq K$ . Sonst gilt  $S_i \subseteq \overline{K}$ . Zusammen mit  $S_1 + \dots + S_{k^d} = S = K + \overline{K}$  und  $K \cong \overline{K}$  folgt daraus, daß der  $d$ -dimensionale  $H$ -Keil  $K$  in  $\frac{k^d}{2}$  paarweise kongruente zu  $S$  ähnliche Simplexe zerlegbar ist.  $\square$

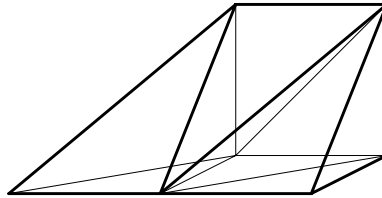


Abbildung 4.5: Zerlegung eines dreidimensionalen  $H$ -Keils in vier  $H$ -Simplexe

Als eine Folgerung aus dem Lemma 4.11 und dem Lemma 4.12 ergibt sich

**Satz 4.13.** *Sei  $d$  eine ungerade und  $k$  eine gerade Zahl. Dann ist jeder  $d$ -dimensionale  $H$ -Keil  $k^d$ -replizierend.*

## 4.4 Replizierende $d$ -dimensionale Quader

Als spezielle konvexe Polyeder werden jetzt die Quader betrachtet. Ein  $d$ -dimensionaler Quader (kurz  $d$ -Quader) ist ein  $d$ -Parallelotop, bei dem die erzeugenden

Kantenvektoren paarweise orthogonal sind. Für alle natürlichen Zahlen  $k \geq 2$  werden  $k$ -replizierende  $d$ -dimensionale Quader bestimmt. Es gibt also  $k$ -replizierende  $d$ -Polytope für alle natürlichen Zahlen  $k \geq 2$ .

Gilt  $k = l_1 \cdots l_d$  mit  $l_1, \dots, l_d \in \mathbb{N}$ , dann ist der  $d$ -Quader  $Q$  mit den Kantenlängen

$$x_1 = u, \\ x_i = \left( \frac{l_1^{d-i+1} \cdots l_{i-1}^{d-i+1}}{l_i^{i-1} \cdots l_d^{i-1}} \right)^{\frac{1}{d}} u, \quad i = 2, \dots, d,$$

mit  $u \in (0, \infty)$   $k$ -replizierend. Rekursiv lassen sich die Kantenlängen von  $Q$  folgendermaßen berechnen

$$x_{i+1} = \left( \frac{l_i^d}{l_1 \cdots l_d} \right)^{\frac{1}{d}} x_i = k^{-\frac{1}{d}} l_i x_i, \quad i = 1, \dots, d-1.$$

Der Quader  $Q$  kann durch Schnittflächen, die parallel zu den Seitenflächen verlaufen, so in untereinander kongruente Quader  $Q_1, \dots, Q_k$  zerlegt werden, daß die Quader  $Q_1, \dots, Q_k$  die Kantenlängen

$$y_i = \frac{x_{i+1}}{l_i}, \quad i = 1, \dots, d-1, \\ y_d = \frac{x_1}{l_d}$$

haben. Diese Zerlegung ist  $k$ -replizierend. Denn es gilt

$$\frac{x_i}{y_i} = l_i \frac{x_i}{x_{i+1}} = k^{\frac{1}{d}}, \quad i = 1, \dots, d-1, \\ \frac{x_d}{y_d} = l_d \frac{x_d}{x_1} = l_d \left( \frac{l_1 \cdots l_{d-1}}{l_d^{d-1}} \right)^{\frac{1}{d}} = k^{\frac{1}{d}}.$$

Die Quader  $Q_1, \dots, Q_k$  sind also ähnlich zu  $Q$ .

Ist  $n \in \{2, \dots, d\}$  ein Teiler von  $d$  und gilt  $k = l^n$  mit  $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$ , dann gibt es weitere  $k$ -replizierende  $d$ -Quader. In diesem Fall ist jeder  $d$ -Quader  $k$ -replizierend, der sich als kartesisches Produkt von  $n$  jeweils  $l$ -replizierenden  $\frac{d}{n}$ -dimensionalen Quadern darstellen läßt (vgl. Satz 4.4). Für  $k = l^d$  mit  $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$  ist beispielsweise jeder  $d$ -Quader  $k$ -replizierend. Eine  $k$ -replizierende Zerlegung eines  $d$ -Quaders  $Q$  erhält man im Fall  $k = l^d$ , wenn man jede Kante von  $Q$  in  $l$  gleich lange Strecken zerlegt und  $Q$  durch Hyperebenen, die durch die so entstehenden Punkte verlaufen und parallel zu den Seitenflächen von  $Q$  sind, zerschneidet.

Ob es weitere  $k$ -replizierende  $d$ -dimensionale Quader gibt, ist für  $d \geq 4$  nicht bekannt. Ein Rechteck, d. h. ein zweidimensionaler Quader, ist nach Satz 2.10 genau dann  $k$ -replizierend, wenn  $k$  eine Quadratzahl ist oder wenn es natürliche Zahlen  $m, n$  gibt mit  $k = mn$  und sich die Seitenlängen des Rechtecks wie  $\sqrt{m} : \sqrt{n}$  verhalten. Die oben angegebenen Bedingungen sind also für  $d = 2$  nicht nur hinreichend sondern auch notwendig. Das gleiche gilt für  $d = 3$ :

**Satz 4.14.** *Ein dreidimensionaler Quader ist genau dann  $k$ -replizierend, wenn  $k$  eine dritte Potenz ist oder wenn die Kantenlängen des Quaders gleich*

$$u, \quad \left(\frac{l^2}{mn}\right)^{\frac{1}{3}} u, \quad \left(\frac{lm}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} u$$

mit  $u \in (0, \infty)$ ,  $l, m, n \in \mathbb{N}$  sind und gilt  $k = lmn$ .

**Beweis.** Nach den oben gemachten Betrachtungen genügt es zu zeigen, daß die für den Fall „ $k$  ist keine dritte Potenz“ angegebene Bedingung notwendig ist. Sei also  $k$  eine natürliche Zahl mit  $k \neq l^3$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ . Desweiteren sei  $Q$  ein dreidimensionaler  $k$ -replizierender Quader, d. h. es gibt eine Zerlegung  $Q = Q_1 + \dots + Q_k$  mit  $Q_i \cong k^{-\frac{1}{3}}Q$  für  $i = 1, \dots, k$  (vgl. Lemma 1.2). Die Kantenlängen der untereinander kongruenten Zerlegungsquader  $Q_1, \dots, Q_k$  seien o.B.d.A.  $1, x, y$  mit  $x, y \in (0, \infty)$ . Dann hat  $Q$  die Kantenlängen  $k^{\frac{1}{3}}, k^{\frac{1}{3}}x, k^{\frac{1}{3}}y$ .

Bei der Zerlegung  $Q = Q_1 + \dots + Q_k$  wird jede Kante von  $Q$  in Kanten von  $Q_1, \dots, Q_k$  zerlegt. Deshalb muß es Zahlen  $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{N}_0$  geben, so daß gilt

$$\begin{aligned} a + bx + cy &= k^{\frac{1}{3}} \\ d + ex + fy &= k^{\frac{1}{3}}x \\ g + hx + iy &= k^{\frac{1}{3}}y. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Das System (4.5) wird jetzt als lineares Gleichungssystem in  $x$  und  $y$  aufgefaßt. Es werden alle Lösungen dieses linearen Gleichungssystems für  $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{N}_0$  bestimmt. Wegen  $k^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{Q}$  sind die Vektoren  $(b, e - k^{\frac{1}{3}}, h)$  und  $(c, f, i - k^{\frac{1}{3}})$  linear unabhängig. Folglich hat die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (4.5) den Rang 2. Wenn es eine Lösung des linearen Gleichungssystems gibt, ist diese also eindeutig. Da die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems Elemente des Körpers  $\mathbb{Q}(k^{\frac{1}{3}})$  sind, gilt deshalb auch für eine Lösung  $(x, y)$  des Gleichungssystems  $x, y \in \mathbb{Q}(k^{\frac{1}{3}})$ . Somit existieren eindeutig bestimmte rationale Zahlen  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$  mit

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 k^{\frac{1}{3}} + x_2 k^{\frac{2}{3}}, \\ y &= y_0 + y_1 k^{\frac{1}{3}} + y_2 k^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man für jede Gleichung des Systems (4.5) drei neue Gleichungen. Insgesamt ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem mit den Variablen  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$

$$\begin{aligned} a + bx_0 + cy_0 &= 0 \\ bx_1 + cy_1 &= 1 \\ bx_2 + cy_2 &= 0 \\ d + ex_0 + fy_0 &= kx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ex_1 + fy_1 &= x_0 \\
 ex_2 + fy_2 &= x_1 \\
 g + hx_0 + iy_0 &= ky_2 \\
 hx_1 + iy_1 &= y_0 \\
 hx_2 + iy_2 &= y_1
 \end{aligned}$$

Damit dieses Gleichungssystem lösbar ist, muß

$$0 = a + e + i \quad (4.6)$$

gelten. Zum Beweis betrachte man die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{cccccc|c}
 x_0 & y_0 & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \\
 \hline
 b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\
 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\
 e & f & 0 & 0 & -k & 0 & -d \\
 -1 & 0 & e & f & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & e & f & 0 \\
 h & i & 0 & 0 & 0 & -k & -g \\
 0 & -1 & h & i & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & h & i & 0
 \end{array}$$

Durch Zeilenvertauschungen und anschließendes Eliminieren erhält man

$$\begin{array}{cccccc|c}
 x_0 & y_0 & x_1 & y_1 & & & \\
 \hline
 -1 & 0 & e & f & & & 0 \\
 0 & -1 & h & i & & & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & & & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & & & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & be^2 + ceh + bfh + chi & bef + cfh + bfi + ci^2 & -a \\
 0 & 0 & 0 & 0 & be + ch & bf + ci & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -k + e^3 + 2efh + fhi & e^2f + f^2h + efi + fi^2 & -d \\
 0 & 0 & 0 & 0 & e^2h + ehi + fh^2 + hi^2 & -k + efh + 2fhi + i^3 & -g
 \end{array}$$

Subtrahiert man nun das  $(e + i)$ -fache der 6. Zeile von der 5. Zeile, ergibt sich als neue 5. Zeile

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & bfh - bei & cfh - cei & -a - e - i
 \end{array}$$

Wenn man von dieser Zeile das  $(fh - ei)$ -fache der 7. Zeile abzieht, erhält man

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a - e - i
 \end{array}$$

Woraus sich die Gleichung (4.6) ergibt. Da  $a, e, i \geq 0$  gilt, folgt aus (4.6)  $a = e =$

$i = 0$ . Damit ergibt sich für die erweiterte Koeffizientenmatrix (ohne die 5. Zeile)

$$\begin{array}{cccccc|c}
 x_0 & y_0 & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \\
 \hline
 -1 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & f & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & h & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & ch & bf & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -k & f^2h & -d \\
 0 & 0 & 0 & 0 & fh^2 & -k & -g
 \end{array} \quad (4.7)$$

Es werden jetzt zwei Fälle für  $b$  unterschieden. Im 1. Fall sei  $b = 0$ . Dann muß  $c \neq 0$  und  $h \neq 0$  gelten, da  $b$  und  $ch$  nicht gleichzeitig gleich Null sein können (siehe 5. Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix (4.7)). Somit folgt aus der 6. Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix (4.7)

$$y_2 = 0.$$

Durch Rückwärtssubstitution erhält man nacheinander

$$x_2 = \frac{1}{ch}, \quad y_1 = \frac{1}{c}, \quad x_1 = 0, \quad y_0 = 0, \quad x_0 = \frac{f}{c}.$$

Aus der 7. Zeile folgt damit  $k = cdh$  und aus der 8. Zeile  $\frac{fh}{c} = -g$ . Wegen  $c, h > 0$  und  $f, g \geq 0$  muß somit  $f = 0$  und  $g = 0$  gelten. Faßt man die Ergebnisse zusammen, erhält man

$$k = cdh, \quad x = \frac{1}{ch} k^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{d^2}{ch} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad y = \frac{1}{c} k^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{dh}{c^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Im 2. Fall sei  $b \neq 0$ . In diesem Fall erhält man aus der 6. Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix (4.7)  $x_2 = -\frac{c}{b} y_2$ . Somit ergibt sich aus den Zeilen 5, 7 und 8

$$\left( -\frac{c^2h}{b} + bf \right) y_2 = 1 \quad (4.8)$$

$$\left( \frac{ck}{b} + f^2h \right) y_2 = -d \quad (4.9)$$

$$\left( -\frac{cfh^2}{b} - k \right) y_2 = -g \quad (4.10)$$

Aus der Gleichung (4.8) folgt  $y_2 \neq 0$  und aus der Gleichung (4.10) folgt  $y_2 \geq 0$ , so daß insgesamt  $y_2 > 0$  gelten muß. Damit ergibt sich aus der Gleichung (4.9):  $c = 0$ ,  $fh = 0$ ,  $d = 0$ . Da  $c$  oder  $f$  ungleich Null sein muß (siehe 5. Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix (4.7)), erhält man  $c = d = h = 0$  und es folgt

$$y_2 = \frac{1}{bf}, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{b}, \quad y_0 = 0, \quad x_0 = 0$$

und  $k = bfg$ . Insgesamt ergibt sich

$$k = bfg, \quad x = \frac{1}{b} k^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{fg}{b^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad y = \frac{1}{bf} k^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{g^2}{bf} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Also muß auch im 2. Fall die im Satz angegebene Bedingung erfüllt sein.  $\square$

Es existieren z. B. genau drei 6-replizierende dreidimensionale Quader mit den Kantenlängen  $x \geq y \geq 1$ . Die Abbildung 4.6 zeigt Bilder dieser Quader.

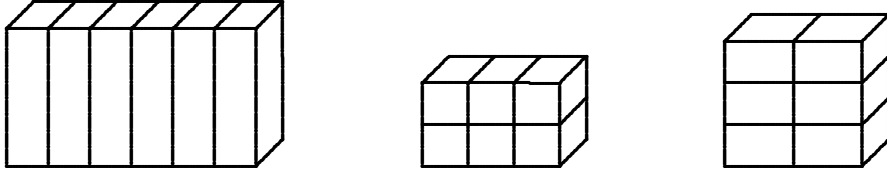


Abbildung 4.6: 6-replizierende dreidimensionale Quader mit Kantenlängen  $6^{\frac{2}{3}}, 6^{\frac{1}{3}}, 1$  bzw.  $6^{\frac{1}{3}}, (\frac{4}{3})^{\frac{1}{3}}, 1$  bzw.  $6^{\frac{1}{3}}, (\frac{9}{2})^{\frac{1}{3}}, 1$

## 4.5 2-replizierende $d$ -Polytope

In diesem Abschnitt sollen 2-replizierende  $d$ -Polytope bestimmt werden. Zunächst wird eine einfache Klasse von  $d$ -Polytopen untersucht:

**Satz 4.15.** *Ein  $d$ -Quader ist genau dann 2-replizierend, wenn er die Kantenlängen  $u, 2^{-\frac{1}{d}}u, 2^{-\frac{2}{d}}u, \dots, 2^{-\frac{d-1}{d}}u$  mit  $u \in (0, \infty)$  hat.*

**Beweis.** Nach den Überlegungen aus dem vorangegangenen Abschnitt ist klar, ein  $d$ -Quader mit den Kantenlängen  $u, 2^{-\frac{1}{d}}u, 2^{-\frac{2}{d}}u, \dots, 2^{-\frac{d-1}{d}}u$  mit  $u \in (0, \infty)$  ist 2-replizierend.

Sei jetzt  $Q$  ein 2-replizierender  $d$ -Quader mit den Kantenlängen  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_d$ . Dann gibt es eine Zerlegung  $Q = Q_1 + Q_2$  mit  $Q_i \cong 2^{-\frac{1}{d}}Q$  für  $i = 1, 2$  (vgl. Lemma 1.2). Man erhält diese Zerlegung von  $Q$  in  $Q_1$  und  $Q_2$  durch einen Schnitt, der parallel zu einer Seitenfläche von  $Q$  ist. Da außerdem die längste Kante von  $Q$  keine Kante von  $Q_1$  oder  $Q_2$  sein kann, haben  $Q_1$  und  $Q_2$  die Kantenlängen  $\frac{1}{2}x_1, x_2, \dots, x_d$ . Wegen  $Q_i \cong 2^{-\frac{1}{d}}Q$  für  $i = 1, 2$  haben  $Q_1$  und  $Q_2$  andererseits die Kantenlängen  $2^{-\frac{1}{d}}x_1, \dots, 2^{-\frac{1}{d}}x_d$ . Daraus folgt  $x_2 = 2^{-\frac{1}{d}}x_1, \dots, x_d = 2^{-\frac{1}{d}}x_{d-1}$  und  $\frac{1}{2}x_1 = 2^{-\frac{1}{d}}x_d$ . Somit hat  $Q$  die Kantenlängen  $x_1, 2^{-\frac{1}{d}}x_1, \dots, 2^{-\frac{d-1}{d}}x_1$ .  $\square$

Nach den Ergebnissen aus dem Kapitel 2 ist ein 2-Polytop genau dann 2-replizierend, wenn es ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck oder ein Parallelogramm mit dem Seitenverhältnis  $1 : \sqrt{2}$  ist. Mit diesen konvexen Polygonen lassen sich nach Satz 4.5 2-replizierende  $d$ -Polytope für alle geraden Zahlen  $d$  konstruieren. Ist  $P$



ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck oder ein Parallelogramm mit dem Seitenverhältnis  $1 : \sqrt{2}$ , dann ist für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  das  $(2n)$ -Polytop  $P \times 2^{-\frac{1}{2n}}P \times 2^{-\frac{2}{2n}}P \times \cdots \times 2^{-\frac{n-1}{2n}}P$  ebenfalls 2-replizierend. Während das kartesische Produkt von Parallelotopen wieder ein Parallelotop ist, ist das kartesische Produkt von Simplexen kein Simplex. Es stellt sich die Frage, ob es außer den gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecken weitere 2-replizierende Simplexe gibt. Zur Beantwortung dieser Frage werden hier folgende Aussagen benötigt:

**Lemma 4.16.** Für  $h, i, j \in \mathbb{N}$  und  $d \in \mathbb{N}$  mit  $d \geq 2$  gilt:

a) Die Gleichung

$$2^{-\frac{i}{d}} + 2^{-\frac{j}{d}} = 1 \quad (4.11)$$

ist nur für  $i = j = d$  erfüllt.

b) Die Gleichung

$$2^{-\frac{2i}{d}} + 2^{-\frac{2j}{d}} - 2 \cdot 2^{-\frac{2h}{d}} = \frac{1}{2} \quad (4.12)$$

ist nur für  $d \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $h = i + j$  und  $i = \frac{d}{2}$  oder  $j = \frac{d}{2}$  erfüllt.

**Beweis.** Seien  $h, i, j, d \in \mathbb{N}$  mit  $d \geq 2$ . Zum Beweis der beiden Aussagen wird der Körper  $\mathbb{Q}(2^{-\frac{1}{d}})$  betrachtet. Beide Seiten der Gleichung (4.11) und der Gleichung (4.12) sind Elemente von  $\mathbb{Q}(2^{-\frac{1}{d}})$ . Für jedes  $x \in \mathbb{Q}(2^{-\frac{1}{d}})$  gibt es eindeutig bestimmte rationale Zahlen  $x_0, \dots, x_{d-1}$  mit  $x = x_0 + x_1 2^{-\frac{1}{d}} + \cdots + x_{d-1} 2^{-\frac{d-1}{d}}$ . Damit die Gleichung (4.11) erfüllt ist, muß somit  $2^{-\frac{i}{d}} \in \mathbb{Q}$  und  $2^{-\frac{j}{d}} \in \mathbb{Q}$  gelten. Daraus ergibt sich  $2^{-\frac{i}{d}} = 2^{-\frac{j}{d}} = \frac{1}{2}$  bzw.  $i = j = d$ .

Zum Beweis der Aussage b) werden zwei Fälle unterschieden. Im Fall  $2^{-\frac{2h}{d}} \notin \mathbb{Q}$  muß entweder  $2^{-\frac{2i}{d}} = 2 \cdot 2^{-\frac{2h}{d}}$  und  $2^{-\frac{2j}{d}} = \frac{1}{2}$  oder  $2^{-\frac{2j}{d}} = 2 \cdot 2^{-\frac{2h}{d}}$  und  $2^{-\frac{2i}{d}} = \frac{1}{2}$  gelten. Daraus folgt  $h = i + \frac{d}{2}$  und  $j = \frac{d}{2}$  oder  $h = j + \frac{d}{2}$  und  $i = \frac{d}{2}$ .

Im Fall  $2^{-\frac{2h}{d}} \in \mathbb{Q}$  muß gelten  $2^{-\frac{2i}{d}}, 2^{-\frac{2j}{d}} \in \mathbb{Q}$ . Aus  $2^{-\frac{2i}{d}} + 2^{-\frac{2j}{d}} > \frac{1}{2}$  ergibt sich somit  $2^{-\frac{2i}{d}} = \frac{1}{2}$  oder  $2^{-\frac{2j}{d}} = \frac{1}{2}$ . Folglich gilt  $i = \frac{d}{2}$  oder  $j = \frac{d}{2}$ . Für  $i = \frac{d}{2}$  erhält man  $2^{-\frac{2j}{d}} = 2 \cdot 2^{-\frac{2h}{d}}$ , also  $h = j + \frac{d}{2}$ . Für  $j = \frac{d}{2}$  erhält man  $2^{-\frac{2i}{d}} = 2 \cdot 2^{-\frac{2h}{d}}$ , also  $h = i + \frac{d}{2}$ .  $\square$

**Satz 4.17.** Kein  $d$ -dimensionales Simplex mit  $d \geq 3$  ist 2-replizierend. Ein Dreieck ist genau dann 2-replizierend, wenn es gleichschenkelig und rechtwinklig ist.

**Beweis.** Sei  $S := \text{conv}\{p_1, \dots, p_{d+1}\}$  ein 2-replizierendes  $d$ -dimensionales Simplex. Es gibt also eine Zerlegung  $S = S_1 + S_2$  mit  $S_1 \cong S_2$  und  $S_1 \sim S$ .

Sei  $p_1 p_2 := \text{conv}\{p_1, p_2\}$  die längste Kante von  $S$ . Für die Länge dieser Kante gelte  $|p_1 p_2| = 1$ . Da  $S_1$  und  $S_2$  ähnlich zu  $S$  sind, kann die längste Kante von  $S$  weder mit einer Kante von  $S_1$  noch mit einer Kante von  $S_2$  übereinstimmen. Somit existiert ein Punkt  $q$ , der im relativen Inneren der Kante  $p_1 p_2$  liegt und durch den diese Kante in eine Kante von  $S_1$  und in eine Kante von  $S_2$  zerlegt wird. Eine weitere Kante von  $S$

wird nicht zerlegt. Damit erhält man mit der Vereinbarung, daß der Punkt  $p_1$  eine Ecke von  $S_1$  ist,  $S_1 = \text{conv}\{p_1, p_3, \dots, p_{d+1}, q\}$  und  $S_2 = \text{conv}\{p_2, \dots, p_{d+1}, q\}$ .

Jetzt sollen Aussagen über die Länge der Kanten von  $S_1$  und  $S_2$  getroffen werden. Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  Ähnlichkeitsabbildungen des  $\mathbb{R}^d$  mit  $\gamma_1(S) = S_1$  und  $\gamma_2(S) = S_2$ . Für jede Kante  $f$  von  $S_1$  bzw.  $S_2$  muß eine Kante  $g_1$  von  $S$  existieren mit  $f = \gamma_1(g_1)$  oder  $f = \gamma_2(g_1)$ . Da der Ähnlichkeitsfaktor von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  gleich  $2^{-\frac{1}{d}}$  ist, gilt  $|f| = 2^{-\frac{1}{d}}|g_1|$ . Ist  $g_1$  keine Kante von  $S_1$  und keine Kante von  $S_2$ , so muß  $g_1$  gleich  $p_1p_2$  sein, denn dies ist die einzige Kante von  $S$  mit dieser Eigenschaft. In diesem Fall gilt  $|f| = 2^{-\frac{1}{d}}|p_1p_2| = 2^{-\frac{1}{d}}$ . Wenn dagegen  $g_1$  Kante von  $S_1$  oder  $S_2$  ist, gibt es eine Kante  $g_2$  von  $S$  mit  $g_1 = \gamma_1(g_2)$  oder  $g_1 = \gamma_2(g_2)$  und  $|g_1| = 2^{-\frac{1}{d}}|g_2|$ , also  $|f| = 2^{-\frac{2}{d}}|g_2|$ . Ist  $g_2$  keine Kante von  $S_1$  oder  $S_2$ , erhält man  $|f| = 2^{-\frac{2}{d}}$ , sonst existiert eine Kante  $g_3$  von  $S$  mit  $|f| = 2^{-\frac{3}{d}}|g_3|$ , usw. Somit ergibt sich für die Länge einer Kante  $f$  von  $S_1$  oder  $S_2$

$$|f| = 2^{-\frac{i}{d}} \quad \text{mit } i \in \{1, \dots, n\}, \quad n := \binom{d+1}{2}.$$

Im Folgenden werden fünf Typen von Strecken  $AB$  mit  $A, B \in \{p_1, \dots, p_{d+1}, q\}$ ,  $A \neq B$  unterschieden:

**Typ 1:** Die  $\binom{d-1}{2}$  verschiedenen Strecken  $p_l p_m$  mit  $l, m \in \{3, \dots, d+1\}$ . Diese Strecken sind gleichzeitig Kanten von  $S$ , von  $S_1$  und von  $S_2$ .

**Typ 2:** Die  $2(d-1)$  Strecken  $p_1 p_l$  und  $p_2 p_l$  mit  $l \in \{3, \dots, d+1\}$ . Diese Strecken sind entweder Kanten von  $S$  und  $S_1$  oder Kanten von  $S$  und  $S_2$ .

**Typ 3:** Die  $d-1$  Strecken  $q p_l$  mit  $l \in \{3, \dots, d+1\}$ . Diese Strecken sind sowohl Kanten von  $S_1$  als auch von  $S_2$ , aber keine Kanten von  $S$ .

**Typ 4:** Die zwei Strecken  $p_1 q$ ,  $p_2 q$ .

**Typ 5:** Die Strecke  $p_1 p_2$ .

Die Größe  $a_i^{(h)}$ ,  $h \in \{1, \dots, 4\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , gebe die Anzahl der Strecken vom Typ  $h$  der Länge  $2^{-\frac{i}{d}}$  an. Es gilt:

(i)  $a_d^{(4)} = 2$  und  $a_i^{(4)} = 0$  für  $i = 1, \dots, d-1, d+1, \dots, n$ . Denn es gilt

$$1 = |p_1 p_2| = |p_1 q| + |p_2 q| = 2^{-\frac{d}{d}} + 2^{-\frac{d}{d}}$$

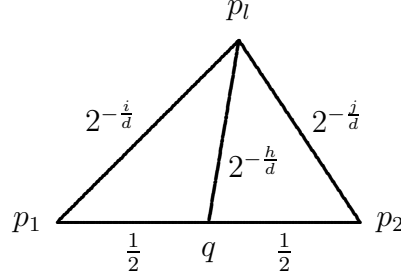
mit  $j, l \in \{1, \dots, n\}$ . Mit Lemma 4.16 folgt  $j = l = d$ .

(ii)  $a_i^{(2)} \equiv 0 \pmod{2}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Denn für die Summe  $s_i$  der Anzahl der Kanten der Länge  $2^{-\frac{i}{d}}$  von  $S_1$  und der Anzahl der Kanten der gleichen Länge von  $S_2$  gilt

$$s_i = 2a_i^{(1)} + a_i^{(2)} + 2a_i^{(3)} + a_i^{(4)}.$$

Da  $S_1$  und  $S_2$  kongruent sind, muß  $s_i$  eine gerade natürliche Zahl sein. Mit (i) folgt somit die Behauptung.

Nun sollen weitere Eigenschaften der Größen  $a_i^{(h)}$  bestimmt werden. Dazu werden zunächst die Dreiecke  $\Delta p_1 p_2 p_l$  mit  $l \in \{3, \dots, d+1\}$  und ihre Zerlegung in die Dreiecke  $\Delta p_1 q p_l$  und  $\Delta p_2 q p_l$  betrachtet. Für die Seitenlängen dieser Dreiecke gilt  $|p_1 q| = |p_2 q| = \frac{1}{2}$ ,  $|p_1 p_l| = 2^{-\frac{i}{d}}$ ,  $|p_2 p_l| = 2^{-\frac{j}{d}}$ ,  $|q p_l| = 2^{-\frac{h}{d}}$  mit  $h, i, j \in \{1, \dots, n\}$ .


 Abbildung 4.7: Zerlegung des Dreiecks  $\Delta p_1 p_2 p_l$ 

Nach dem Kosinussatz gilt für das Dreieck  $\Delta p_1 q p_l$

$$2^{-\frac{2i}{d}} = \frac{1}{4} + 2^{-\frac{2h}{d}} - 2^{-\frac{h}{d}} \cos \angle(p_1 q p_l)$$

und für das Dreieck  $\Delta p_2 q p_l$

$$2^{-\frac{2j}{d}} = \frac{1}{4} + 2^{-\frac{2h}{d}} - 2^{-\frac{h}{d}} \cos \angle(p_2 q p_l).$$

Wegen  $\angle(p_1 q p_l) = \pi - \angle(p_2 q p_l)$  ergibt die Addition der beiden Gleichungen  $2^{-\frac{2i}{d}} + 2^{-\frac{2j}{d}} = \frac{1}{2} + 2 \cdot 2^{-\frac{2h}{d}}$ . Nach Lemma 4.16 ist diese Gleichung nur erfüllt, wenn  $d$  eine gerade Zahl ist. Somit ist  $d \equiv 0 \pmod{2}$  eine notwendige Bedingung dafür, daß ein  $d$ -dimensionales Simplex 2-replizierend ist. Außerdem muß nach Lemma 4.16 gelten

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & i = \frac{d}{2} \wedge h = j + \frac{d}{2} \quad \text{oder} \\ \text{(b)} \quad & j = \frac{d}{2} \wedge h = i + \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Somit hat jedes der insgesamt  $d-1$  Dreiecke  $\Delta p_1 p_2 p_l$  mindestens eine Seite  $p_1 p_l$  oder  $p_2 p_l$  der Länge  $2^{-\frac{1}{2}}$ . Daraus folgt  $a_{d/2}^{(2)} \geq d-1$ . Mit (ii) und  $d$  gerade erhält man sogar

$$\text{(iii)} \quad a_{d/2}^{(2)} \geq d.$$

Außerdem folgt aus (a) und (b) für die Strecken  $q p_l$ ,  $l = 3, \dots, d+1$ , d.h. die Strecken vom Typ 3,

$$\text{(iv)} \quad a_i^{(3)} = 0, \quad i = 1, \dots, \frac{d}{2}$$

$$\text{(v)} \quad a_i^{(3)} = a_{i-d/2}^{(2)}, \quad i = \frac{d}{2} + 1, \dots, d-1, d+1, \dots, n$$

$$(vi) \quad a_d^{(3)} = a_{d/2}^{(2)} - d + 1.$$

Da die Strecke  $p_1p_2$  die einzige Kante von  $S$  ist, die keine Kante von  $S_1$  oder  $S_2$  ist, und da außerdem die kürzeste Kante von  $S_1$  und  $S_2$  keine Kante von  $S$  ist, können die Kanten von  $S$  nur die Längen  $1, 2^{-\frac{1}{d}}, \dots, 2^{-\frac{n-1}{d}}$  haben. Sei  $b_i, i = 0, \dots, n-1$ , die Anzahl der Kanten von  $S$  mit der Länge  $2^{-\frac{i}{d}}$ . Die Größen  $b_i$  lassen sich folgendermaßen rekursiv berechnen

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_i &= 2b_{i-1} - a_i^{(1)} - 2a_i^{(3)} - a_i^{(4)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (4.13)$$

denn jede Kante der Länge  $2^{-\frac{i-1}{d}}, i \in \{1, \dots, n-1\}$ , von  $S$  wird auf je eine Kante der Länge  $2^{-\frac{i}{d}}$  von  $S_1$  und von  $S_2$  vermöge  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$  abgebildet. Nur die Strecken vom Typ 1 und 2 sind aber sowohl Kanten von  $S$  als auch von  $S_1$  oder  $S_2$ . Außerdem sind im Gegensatz zu den Strecken vom Typ 2 und 4 die Strecken vom Typ 1 und 3 gleichzeitig Kanten von  $S_1$  und  $S_2$ .

Ferner gilt  $b_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)}$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Damit ergibt sich  $b_{i-1} = a_i^{(1)} + \frac{1}{2}a_i^{(2)} + a_i^{(3)} + \frac{1}{2}a_i^{(4)}$ . Setzt man dies in (4.13) ein, erhält man

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_i &= b_{i-1} + \frac{1}{2}a_i^{(2)} - a_i^{(3)} - \frac{1}{2}a_i^{(4)}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Daraus folgt mit (i) und (iv) für  $b_{d/2}$

$$b_{d/2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d/2} a_i^{(2)}.$$

Mit  $\sum_{i=1}^n a_i^{(2)} = 2(d-1)$  erhält man

$$b_{d/2} = 1 + \frac{1}{2} 2(d-1) - \frac{1}{2} \sum_{i=d/2+1}^n a_i^{(2)} = d - \frac{1}{2} \sum_{i=d/2+1}^n a_i^{(2)}. \quad (4.15)$$

Andererseits gilt mit (iii)

$$b_{d/2} \geq a_{d/2}^{(2)} \geq d. \quad (4.16)$$

Aus (4.15) und (4.16) folgt  $\sum_{i=d/2+1}^n a_i^{(2)} = 0$ . Außerdem muß in den Ungleichungen (4.16) Gleichheit eintreten. Somit gilt für  $a_i^{(2)}$

$$(vii) \quad a_i^{(2)} = 0 \text{ für } i = \frac{d}{2} + 1, \dots, n, \quad a_{d/2}^{(2)} = d, \quad \sum_{i=1}^{d/2-1} a_i^{(2)} = d - 2.$$

Mit (iv), (v) und (vi) erhält man damit für  $a_i^{(3)}$

$$(viii) \quad a_i^{(3)} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, \frac{d}{2}, d+1, \dots, n, \quad a_d^{(3)} = 1, \quad \sum_{i=d/2+1}^{d-1} a_i^{(3)} = d-2.$$

Die kürzeste Kante von  $S_1$  und  $S_2$  kann keine Kante von  $S$  sein. Da somit nach (i) und (viii) die kürzeste Kante von  $S_1$  und  $S_2$  die Länge  $2^{-1}$  hat, müssen die Kanten von  $S$  mindestens die Länge  $2^{\frac{1}{d}} \cdot 2^{-1} = 2^{-\frac{d-1}{d}}$  haben, d. h.  $b_i = 0$  für  $i = d, \dots, n-1$ . Für die Anzahl der Kanten von  $S$  gilt demzufolge  $\binom{d+1}{2} = \sum_{i=0}^{d-1} b_i$ .

Es gilt  $b_0 = 1$ . Für  $i \in \{1, \dots, \frac{d}{2} - 1\}$  ergibt sich nach (4.14), (i) und (viii)

$$b_i = 1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^i a_l^{(2)},$$

für  $i = \frac{d}{2}$  nach (4.15), (vii)

$$b_{d/2} = d$$

und damit für  $i \in \{1, \dots, \frac{d}{2} - 1\}$  nach (4.14), (i), (v) und (vii)

$$b_{d/2+i} = d - \sum_{l=1}^i a_{d/2+l}^{(3)} = d - \sum_{l=1}^i a_l^{(2)}.$$

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, erhält man mit der Vereinbarung  $\sum_{l=1}^0 a_l^{(2)} := 0$  für die Anzahl der Kanten von  $S$

$$\begin{aligned} \binom{d+1}{2} &= \sum_{i=0}^{d-1} b_i = \sum_{i=0}^{d/2-1} (b_i + b_{d/2+i}) \\ &= \sum_{i=0}^{d/2-1} \left( 1 + d - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^i a_l^{(2)} \right) \\ &= \frac{d(d+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d/2-1} \sum_{l=1}^i a_l^{(2)}. \end{aligned}$$

Somit muß  $\sum_{i=1}^{d/2-1} \sum_{l=1}^i a_l^{(2)} = 0$  gelten. Daraus folgt insbesondere  $\sum_{i=1}^{d/2-1} a_i^{(2)} = 0$ . Dies ist hier nur für  $d = 2$  möglich (vgl. (vii)). Demzufolge ist für  $d \geq 3$  kein  $d$ -dimensionales Simplex 2-replizierend.

Für  $d = 2$  ergibt sich

$$|p_1 p_2| = 1, \quad |p_1 p_3| = |p_2 p_3| = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad |p_1 q| = |p_2 q| = |p_3 q| = \frac{1}{2}.$$

Ein 2-replizierendes Dreieck muß also gleichschenkelig und rechtwinklig sein. Diese Bedingung ist auch hinreichend.  $\square$

## Kapitel 5

### Abschließende Bemerkungen

Abschließend soll auf einige Probleme hingewiesen werden, die für weitere Untersuchungen Anlaß geben können. Während die  $k$ -replizierenden Dreiecke vollständig klassifiziert sind und in dieser Arbeit gezeigt wurde, daß kein konvexes Fünfeck replizierend ist, gibt es bei den replizierenden konvexen Vierecken noch einige offene Fragen. Eine dieser Fragen ist, ob ein replizierendes Sehnenviereck existiert, das kein Rechteck ist.

Bei den selbstähnlichen konvexen  $n$ -Ecken wurde bis jetzt nur der Fall  $n = 3$  erschöpfend behandelt. Die interessanteste Frage ist hier sicherlich, ob es selbstähnliche konvexe Fünfecke gibt. Nach Satz 2.22 müßten solche Fünfecke die Innenwinkelgrößen  $\alpha_1 = \frac{1}{3}\pi$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha_5 = \frac{5}{6}\pi$  und die Eckenreihenfolge 1,2,3,5,4 haben. Die beim Beweis von Satz 2.22 verwendeten Methoden ermöglichen es nicht, die Menge der in Frage kommenden Fünfecke weiter einzuschränken.

Im Gegensatz zu den konvexen Fünfecken kennt man ein nichtkonvexes Fünfeck, das selbstähnlich ist. Die sogenannte Sphinx (siehe Seite 53) ist das einzige bekannte selbstähnliche nichtkonvexe  $n$ -Eck mit ungeradem  $n$ . Eine interessante Aufgabenstellung ist es deshalb, für ungerade Zahlen  $n$  selbstähnliche nichtkonvexe  $n$ -Ecke zu bestimmen.

Zu den selbstähnlichen  $d$ -dimensionalen Polyedern mit  $d \geq 3$  konnten hier nur erste Ergebnisse geliefert werden – viele Probleme sind noch offen. Dazu gehört die Vermutung von McMullen [5], daß für  $d \geq 3$  jedes replizierende  $d$ -dimensionale Polyeder kombinatorisch äquivalent zum kartesischen Produkt von Simplexen ist. Alle in dieser Arbeit vorgestellten selbstähnlichen  $d$ -dimensionalen Polyeder mit  $d \geq 3$  erfüllen diese Bedingung. Eine interessante Aufgabe ist es sicher auch, gewisse Klassen von Polyedern, wie z. B. Simplexe, hinsichtlich Selbstähnlichkeit zu untersuchen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Bandt, Ch.: *Einige Bemerkungen, Bilder und Fragen zu den selbstähnlichen Mengen*. Preprintreihe Mathematik 20/1988, Greifswald 1988.
- [2] Betke, U.: *Zerlegungen konvexer Polygone*. Unveröffentlichtes Manuskript.
- [3] Bleicher, M. N.: *Decomposition of a  $k$ -gon by  $l$ -gons*. Coxeter Festschrift IV, Mitt. Math. Sem. Gießen **166** (1984), 1-16.
- [4] Bundschuh, P.: *Einführung in die Zahlentheorie*. Springer, Berlin 1998.
- [5] Croft, H. T.; Falconer, K. J.; Guy R. K.: *Unsolved Problems in Geometry*. Springer, New York 1991.
- [6] Debrunner, H. E.: *Tiling euclidean  $d$ -space with congruent simplexes*. Annals New York Academy of Sciences **440** (1985), 230-261.
- [7] Ditrich, F.: *Elementar  $k$ -selbstähnliche Zerlegungen einfacher Polygone*. Diplomarbeit, Jena 1995.
- [8] Doyen, J.; Landuyt, M.: *Dissections of Polygons*. Annals of Discrete Mathematics **18** (1983), 315-318.
- [9] Freese, R. W.; Miller, A. K.; Uskin, Z.: *Can every triangle be divided into  $n$  triangles similar to it?* Am. Math. Monthly **77** (1990), 867-869.
- [10] Goldberg, M.: *Three infinite families of tetrahedral space-fillers*. J. Comb. Theory **16** (1974), 348-354.
- [11] Golomb, S. W.: *Replicating figures in the plane*. Mathematical Gazette **48** (1964), 403-412.
- [12] Grünbaum, B.; Shephard, G. C.: *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman and Company, New York 1987.
- [13] Hadwiger, H.: *Vorlesung über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer, Berlin 1957.
- [14] Hertel, E.: *Self-similar Simplices*. Beiträge zur Algebra und Geometrie **41** (2000), 589-595.

- 
- [15] Hertel, E.: *Zur Affingeometrie konvexer Polygone*. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Math/Inf/00/22, Universität Jena 2000.
  - [16] Hertel, E.: *Verallgemeinerte Hadwiger-Hill Simplexe*. Preprint 2003.
  - [17] Hertel, E.: *Unveröffentlichtes Ergebnis*.
  - [18] Kaiser, H.: *Selbstähnliche Dreieckszerlegungen*. Forschungsergebnisse Universität Jena, Preprint 1990.
  - [19] Langford, C.D.: *Uses of a geometric puzzle*. Mathematical Gazette **24** (1940), 209-211.
  - [20] Snover, St.L.; Waiveris, Ch.; Williams, J.K.: *Rep-tiling for triangles*. Discrete Math. **91** (1991), 193-200.
  - [21] Valette, G.; Zamfirescu, T.: *Les partages d'un polygone convexe en 4 polygones semblables au premier*. J. Comb. Theory **16** (1974), 1-16.



### **Erklärung**

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, 13. September 2004

# Lebenslauf

Ines Osburg

geboren am 11.05.1975 in Leinefelde

## Schulbildung

09.1981 - 06.1991    Besuch der Polytechnischen Oberschule in Hundeshagen  
Abschluß: Mittlere Reife

09.1991 - 06.1993    Besuch des Gymnasiums in Leinefelde  
Abschluß: Abitur

## Berufsausbildung, Berufstätigkeit

09.1993 - 03.1996    Ausbildung zur mathematisch-technischen Assistentin beim  
Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Göttingen

04.1996 - 09.1996    Arbeit in der Hauptabteilung Zentrale Datenverarbeitung  
des DLR in Göttingen

## Hochschulstudium

10.1996 - 06.2001    Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der  
Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Abschluß: Diplom

seit 10.2001          Promotionsstudium an der Fakultät für Mathematik und Informatik  
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Jena, 15.06.2004